

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO DE UM ELEMENTO MISTO DE CASCA DE DUPLA
CURVATURA PARA ANÁLISE DE MATERIAIS MULTILAMINADOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANDRÉ TAMAGNINI NOEL

FLORIANÓPOLIS, OUTUBRO DE 1991

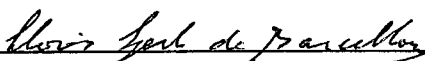
DESENVOLVIMENTO DE UM ELEMENTO MISTO DE CASCA DE DUPLA
CURVATURA PARA ANÁLISE DE MATERIAIS MULTILAMINADOS

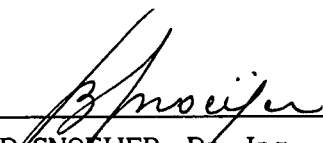
ANDRÉ TAMAGNINI NOEL

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

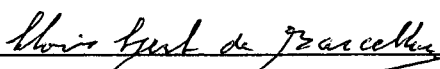
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO, APROVADA
EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.


CLOVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph. D.
ORIENTADOR


BEREND SNOEIJER, Dr. Ing.
COORDENADOR

BANCA EXAMINADORA:


CLOVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph. D.
PRESIDENTE


CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE, Ph. D.


DOMINGOS BOECHAT ALVES, D. Sc.

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao Professor Clovis Sperb de Barcellos, pela orientação deste trabalho.

Aos Funcionários do Núcleo de Processamento de Dados, do Departamento de Engenharia Mecânica e da UFSC, por tornar possível a realização deste trabalho.

À Verinha e a Sula.

Aos Colegas e Professores do GRANTE.

Aos amigos Armando Duarte, Paulo Linzmaier, Renato Barbieri e Roberto Dalledone, pelo companheirismo e incentivo.

Aos amigos Amir Antônio Martins de Oliveira Junior e Carlos Alberto Langer.

À meus Pais

ÍNDICE

Resumo	iv
Abstract	v
Nomenclatura	vi
1 INTRODUÇÃO	
1.1 Apresentação	1
1.2 Materiais Compostos	1
1.3 Análise de cascas laminadas por elementos finitos	3
1.3.1 Modelos para representação de laminados	4
1.3.2 Aproximações para a deformação cisalhante transversal	5
1.3.3 Descrição geométrica	6
1.4 Revisão bibliográfica	7
1.4.1 Introdução	7
1.4.2 Elementos finitos para cascas compostas	10
1.5 Objetivo do trabalho	11
2 MATERIAL COMPOSTO MULTILAMINADO	
2.1 Introdução	12
2.2. Análise de uma lâmina	12
2.2.1 Relações constitutivas para um material anisotrópico	12
2.2.2 Relações constitutivas para uma lâmina de material ortotrópico	13
2.2.3 Relações constitutivas para uma lâmina numa direção arbitrária	15
2.2.4 Relações constitutivas para uma lâmina no estado plano de tensões	17
2.3 Relações constitutivas para um laminado	18
2.4 Cálculo de tensões cisalhantes transversais	21

3 FORMULAÇÃO E DESENVOLVIMENTO

3.1 Introdução	25
3.2 Descrição do elemento finito	25
3.2.1 Apresentação	25
3.2.2 Sistemas de coordenadas	26
3.2.3 Geometria e cinemática	27
3.2.4 Deformações	29
3.3 Equações de elementos finitos	30
3.4 Deformações supostas	36
3.5 Deformações supostas para um elemento distorcido	38

4 RESULTADOS

4.1 Introdução	42
4.2 Problemas com materiais isotrópicos	42
4.2.1 "Patch test"	42
4.2.2 Placa engastada ou simplesmente apoiada	44
4.2.3 Teto de Scordellis-Lo	48
4.3.4 Casca esférica puncionada	49
4.2.5 Cilindro puncionado	50
4.2.5.1 Cilindro puncionado restrito com um diafragma nas extremidades	50
4.2.5.2 Efeitos da distorção da malha	51
4.2.5.3 Cilindro com extremidades livres	52
4.3 Problemas com materiais laminados	53
4.3.1 Placa retangular homogênea anisotrópica engastada sujeita a carregamento uniforme	53
4.3.2 Placa laminada "angle ply" apoiada	55
4.3.3 Placa quadrada 0/90/90/0 apoiada	57
4.3.4 Cilindro engastado sujeito a pressão interna	60
4.3.5 Seção cilíndrica de 90° engastada sujeita a pressão interna	64

	iii
4.3.6 Casca esférica	66
5 CONCLUSÕES	69
REFERÊNCIAS	71
APÊNDICE A	76
APÊNDICE B	78
APÊNDICE C	79

RESUMO

Neste trabalho é apresentado um elemento finito desenvolvido para análise estática linear de cascas de material composto multilaminado. A formulação usada é baseada num método misto de deformações e no princípio de Hellinger-Reissner modificado. O conceito de casca sólida degenerada e campos independentes, de deslocamentos e de deformações supostas, foram usados na formulação do elemento. Uma transformação covariante, entre o sistema natural e o sistema local, é usada para as deformações supostas. O elemento trata o laminado como um meio homogêneo, usando-se para tal um modelo de lâmina equivalente. Consequentemente o número de graus de liberdade do elemento finito independe do número de lâminas. Vários exemplos para materiais isotrópicos e multilaminados são apresentados para ilustrar o comportamento do elemento proposto.

ABSTRACT

A finite element developed for static analysis of multilayer composite shells is presented. A strain-based mixed method is used and the finite element equations are obtained from the modified Hellinger-Reissner principle. The degenerated solid shell concept, independent displacement and assumed strain fields are used. A covariant transformation for the strain functions is employed between the natural and local coordinates. The element considers the laminate as a homogeneous medium by using a "smeared" laminate model. As a result, the number of degrees-of-freedom is independent of the number of layers. Several test cases, for both isotropic and laminated materials, are presented to illustrate the element's performance.

NOMENCLATURA

a	: área
A	: matriz de rigidez extencional
AS	: matriz de rigidez de cisalhamento transversal
B	: matriz de rigidez de acoplamento
B_1	: matriz relação deformação-deslocamento
C	: matriz de rigidez do material
D	: matriz de rigidez de flexão
e	: vetor de deformações
E	: módulo de Young
G	: módulo de cisalhamento transversal
G	: matriz relação forças nodais-deformação
h	: espessura do laminado
H	: matriz quase rigidez
K	: matriz de rigidez
L	: dimensão do maior vão
M	: vetor de momentos fletores
N	: vetor de esforços normais
\bar{N}	: matriz de funções de interpolação Lagrangeana
P	: matriz dos coeficientes de interpolação das deformações generalizadas
q	: vetor dos graus de liberdade
Q	: vetor de esforços cisalhantes transversais
Q_{ij}	: matriz de rigidez reduzida
S	: matriz de flexibilidade do material
T_E	: matriz de transformação de deformações
u, v, w	: deslocamentos de translação
U	: energia
v	: volume

Letras Gregas

β	: vetor de deformações generalizadas
γ	: deformação cisalhante
ϵ	: deformação normal
σ	: tensão normal
τ	: tensão cisalhante transversal
ν	: coeficiente de Poisson
ξ, η, ζ	: coordenadas naturais
θ	: orientação da fibra
θ_1, θ_2	: graus de liberdade de rotação

Subíndices e superíndices

1,2,3	: sistema de coordenadas
k	: número da lâmina
0	: superfície de referência
x,y,z	: sistema local de coordenadas
X,Y,Z	: sistema global de coordenadas
m	: membrana
b	: flexão
s	: cisalhamento
a	: acoplamento
e	: elemento
g	: global
m,n	: componentes covariantes
i,j	: componentes cartesianas

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação

No projeto mecânico as soluções propostas dependem, muitas vezes, de requisitos antagônicos, tais como elevada resistência e baixo peso. Em outras palavras, normalmente a resistência necessária é obtida às custas de um acréscimo de peso que inviabiliza o projeto. Nesse sentido materiais compostos multilaminados têm substituído ligas metálicas em um número crescente de aplicações em virtude de conseguirem aliar uma elevada resistência mecânica a um baixo peso. Alguns exemplos típicos do uso de materiais compostos multilaminados são encontrados em asas e fuselagens de aviões, raquetes de tênis e chassis de automóveis de competição. O uso de materiais compostos multilaminados em componentes estruturais tem incentivado o estudo do comportamento de cascas compostas

1.2 Materiais Compostos

Por material composto entende-se que dois ou mais materiais foram combinados em uma escala macroscópica, formando um material heterogêneo. O propósito de se combinar vários materiais macroscopicamente é aproveitar as qualidades que cada um dos componentes isoladamente possui, e eventualmente, obter qualidades que nenhum tinha.

O presente estudo restringiu-se a materiais compostos filamentosos. Estes materiais são constituídos por fibras, dispostas segundo uma direção estabelecida, e por uma matriz, material que aglomera as fibras. Uma fibra isolada, principalmente devido a sua seção transversal ser pequena, não tem grande aplicação estrutural. Entretanto uma grande quantidade de fibras aglomeradas entre si torna-se um material de possibilidades imensas.

Consegue-se ligar as fibras se estas forem embebidas em uma matriz formando assim um composto. Entre outras funções, a matriz aglomera as fibras, transfere carga entre as fibras e protege as fibras do meio externo [Jones (1975)]. Em

aplicações estruturais, normalmente o conjunto fibra-matriz apresenta-se numa forma de lâmina. Lâminas são essencialmente finas camadas de composto.

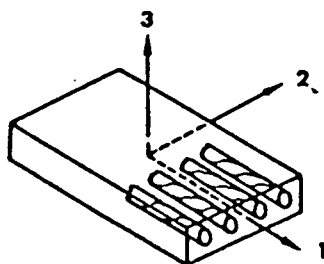


Fig. 1.1 Lâmina de material composto unidirecional

Lâminas de material composto têm características mecânicas muito particulares. Normalmente a rigidez da matriz é muito pequena se comparada à rigidez da fibra. Sendo assim, a rigidez da lâmina é função do ângulo que existe entre a direção das fibras e a direção na qual o esforço está sendo aplicado. Intuitivamente percebe-se que em uma lâmina de fibras unidirecionais, a rigidez da lâmina na direção das fibras é função da rigidez das próprias fibras, enquanto que numa direção perpendicular às fibras, a rigidez da lâmina é função da rigidez da matriz. Em direções intermediárias, matriz e lâmina combinam-se para formar a rigidez efetiva.

Dependendo do tipo de material da fibra e da matriz, a razão entre a rigidez na direção paralela às fibras e a rigidez numa direção perpendicular às fibras pode atingir valores bastante altos. Por exemplo, numa lâmina carbono-epoxi, muito usada na indústria aeroespacial, essa razão pode chegar a valores da ordem de 40 vezes. Materiais com estas características são denominados materiais compostos reforçados por fibras [Jones (1975)].

Materiais compostos avançados podem ser formados por uma variedade muito grande de fibras e matrizes. Tanto fibras como matrizes podem ser metálicas ou não. Entre as fibras mais comuns encontram-se a fibra de vidro, o kevlar e a fibra de carbono. As matrizes mais comuns são resinas, como epoxi e poliéster, mas também existem matrizes metálicas, como alumínio.

A fibra e a matriz usadas dependem essencialmente da aplicação para a qual o composto foi idealizado. Existem dezenas de combinações possíveis, o que aumenta ainda mais o leque de aplicações para compostos.

Uma lâmina de composto é invariavelmente muito fina, sendo normalmente de espessura constante. Possui então uma aplicação muito reduzida. Este problema é resolvido se forem coladas várias lâminas umas sobre as outras. Durante o processo

de fabricação as lâminas são coladas entre si através da sua matriz constituinte.

Um conjunto de lâminas coladas é denominado laminado ou material composto multilaminado. O número de lâminas que formam o laminado depende da aplicação para a qual este é destinado. No caso da indústria aeronáutica, por exemplo, laminados podem facilmente ser formados por mais de 100 (cem) lâminas. Note-se que neste trabalho faz-se a hipótese de que as lâminas estão perfeitamente coladas umas nas outras, não se admitindo assim a ocorrência de falhas ou defeitos no laminado.

As características do laminado dependem do tipo de lâminas e da orientação relativa entre as mesmas. Um laminado formado por um conjunto de lâminas iguais, todas com a mesma orientação, possui um comportamento análogo ao de uma lâmina isolada. Já um laminado formado por lâminas iguais mas em direções diferentes, possui um comportamento diverso do de uma lâmina.

O grande desenvolvimento que os materiais compostos multilaminados têm experimentado nos últimos anos deve-se em parte a estas características. Num laminado de material composto existe a possibilidade de se direcionar a sua rigidez alterando-se o direcionamento das suas lâminas. Numa peça de material composto sujeito a diferentes esforços em várias direções, consegue-se adequar a resistência de cada direção ao esforço que é aplicado nessa direção. Pode-se assim, evitar que haja um superdimensionamento em direções onde não existe solicitação e conseguir uma redução apreciável de peso. Estas características nem sempre podem ser obtidas com materiais metálicos [Reddy e Sandidge (1987)].

Aliando-se a isto uma resistência e uma rigidez específica muito altas, entre outras qualidades, tornaram o uso de material composto corriqueiro em aplicações sensíveis ao peso, como as encontradas nas indústrias aeronáutica e aeroespacial. Além disso, deve-se salientar que materiais compostos possuem boa resistência à fadiga, são bons isolantes térmicos e acústicos, e no caso de fibras a base de carbono, possuem coeficiente de dilatação térmica negativo ou próximo de zero.

1.3 Análise de cascas laminadas por elementos finitos

No projeto mecânico, normalmente a complexidade geométrica dos componentes estruturais impossibilita a obtenção de soluções analíticas para seu dimensionamento. É usado então um método de solução numérico. O método dos elementos finitos (MEF), aqui usado, tem sido extensamente utilizado na análise de laminados, apresentando bons resultados.

Na análise estática linear de cascas compostas multilaminadas por elementos finitos, uma área em pleno desenvolvimento, existem diversos modelos, teorias e aproximações para a geometria, comumente usadas.

1.3.1 Modelos para representação de laminados

Para se representar um laminado pelo método dos elementos finitos, várias abordagens podem ser usadas. Entretanto, pode-se distinguir basicamente dois tipos principais de modelos; modelos de lâminas distintas e modelos de lâmina equivalente.

Modelos de lâminas distintas, MLD, discretizam cada lâmina, de forma a que cada uma possua a sua identidade própria e distinta das demais. O laminado é tratado como um meio heterogêneo no qual cada lâmina é independente. Elementos finitos baseados em modelos de lâminas distintas, em certos casos, podem tratar cada lâmina como sendo um elemento. Um laminado é então descrito por vários elementos sobrepostos, cada um representando uma lâmina. Podem também representar o laminado usando uma função contínua por partes ao longo da espessura.

Modelos de lâmina equivalente, MLE, tratam o laminado não como um meio heterogêneo, que considera a distinção entre as lâminas, mas como um meio homogêneo equivalente mas anisotrópico. Assim, a partir da contribuição de cada lâmina, são determinadas propriedades equivalentes para o laminado. Elementos finitos baseados em modelos de lâmina equivalente usam propriedades equivalentes para representar o laminado. Assim as propriedades das diferentes lâminas são "diluídas" pelo modelo ao longo da espessura.

A classificação acima pode ser novamente subdividida em grupos diferenciados pelo tipo e pela ordem da aproximação feita na direção da espessura. Entre outros, Noor e Burton (1989) e Wilt et al. (1990) discutem estes aspectos.

A partir dos modelos apresentados acima podem ser formulados elementos finitos cujas características e aplicação são brevemente descritas em seguida.

Elementos que fazem uso de um modelo de lâminas distintas são muito precisos e obtêm resultados muito bons. Entretanto, devido à discretização do comportamento de cada lâmina, tornam-se restritos para análises globais de laminados com muito poucas lâminas, devido ao alto custo computacional associado. A sua maior aplicação é para análise local na qual se pretende determinar tensões e deslocamentos numa pequena região com grande precisão.

Elementos baseados em modelos de lâminas equivalentes obtêm bons resultados globais, mas são pouco eficientes para uma análise local. A aproximação de tensões, principalmente as interlaminares, é sofrível, já que o próprio modelo não discretiza as diferenças entre as lâminas. Entretanto, o seu custo computacional independe do número de lâminas.

1.3.2 Aproximações para a deformação cisalhante transversal

Na análise de cascas laminadas várias hipóteses podem ser feitas sobre a deformação cisalhante transversal. Esta é de fundamental importância nos materiais compostos avançados. Nestes a razão entre o módulo de elasticidade e o módulo de cisalhamento transversal pode chegar a 40 vezes, contra 2,6 para materiais isotrópicos típicos. Consequentemente, o cisalhamento transversal tem uma importância muito maior na redução da rigidez efetiva à flexão em materiais compostos do que em materiais isotrópicos.

Para a teoria de placas a importância da deformação cisalhante transversal foi demonstrada em uma série de artigos apresentados por Pagano referentes ao estudo de placas retangulares simplesmente apoiadas com laminados simétricos submetidas à flexão. Para estes casos, foram determinadas soluções exatas baseadas na teoria da elasticidade [Pagano, (1970a), (1970b)]. Os resultados apresentados pela teoria clássica de placas para laminados espessos e semi-espessos são insatisfatórios quando comparados com os resultados previstos pela teoria da elasticidade em virtude da deformação cisalhante ser desprezada.

A teoria clássica de laminação (Classical Lamination Theory - CLT), baseada nas hipóteses de Kirchhoff-Love, não considera a deformação cisalhante transversal. Esta teoria considera que a normal à superfície média permanece reta, inextensível e normal à superfície média deformada, desprezando assim, os efeitos do cisalhamento transversal. Logo, tem aplicação muito reduzida para materiais compostos, limitando-se a casos onde o laminado é muito fino.

Várias teorias que levam em conta o cisalhamento transversal estão disponíveis na literatura. Nestas, estão incluídas as teorias de deformação cisalhante de 1ª ordem (First-order Shear Deformation Theory - FSDT), e as teorias de ordem superior (Higher-order Shear Deformation Theory - HSDT).

A teoria de deformação cisalhante de 1ª ordem baseia-se em hipóteses cinemáticas nas quais se supõe uma distribuição linear dos deslocamentos paralelos à superfície de referência ao longo da normal na direção da espessura. Nesta teoria as normais à superfície média antes da deformação permanecem retas e inextensíveis mas não necessariamente normais depois da deformação. Como a deformação cisalhante é aproximada por um valor constante ao longo da espessura, esta teoria é também conhecida como teoria de ângulo de cisalhamento constante (Constant Shear angle Theory - CST). A teoria de deformação cisalhante de 1ª ordem foi idealizada para materiais isotrópicos. Aparentemente a primeira aplicação desta teoria a materiais ortotrópicos foi feita por Yang, Norris & Stavsky (1966). Uma das características desta teoria é necessitar de uma correção para a deformação cisalhante transversal em virtude da aproximação feita para esta. Para materiais compostos multilaminados

uma das limitações desta teoria advém do fator de correção de cisalhamento ser dependente da orientação e do número de lâminas do laminado, sendo portanto diferente de problema para problema. Dada a dificuldade de um fator de correção de cisalhamento dependente do problema muitas vezes é adotado o valor definido para materiais isotrópicos. Outra solução para esta limitação foi proposta por Noor e Burton (1989) onde é usado um processo iterativo de solução onde a estimativa do fator de correção de cisalhamento é melhorada a cada passo.

As várias teorias de ordem superior existentes são baseadas numa distribuição não linear dos deslocamentos paralelos à superfície de referência ao longo da normal na direção da espessura. Sendo assim, a deformação cisalhante varia ao longo da espessura. A possibilidade da deformação cisalhante variar ao longo da espessura torna desnecessário o uso de um fator de correção do cisalhamento transversal. Note-se que este último foi definido para corrigir a aproximação de deformação cisalhante constante feita nas teorias de 1ª ordem. Portanto, as teorias de ordem superior permitem uma aproximação mais realista da deformação cisalhante transversal. Entretanto o desenvolvimento de teorias de ordem superior para cascas de geometria arbitrária é bastante complexa, tendo esta teoria somente sido aplicada para geometrias simples [Reddy (1985), Murakami (1986)].

Deve-se ressaltar que qualquer das teorias acima pode ser aplicada tanto para o laminado inteiro, como nos elementos baseados em modelos de lâminas equivalentes (MLE), ou para cada lâmina como nos elementos baseados em modelos de lâminas distintas (MLD) [Wilt et al. (1990)].

1.3.3 Descrição geométrica

Na descrição geométrica de uma casca usando o método dos elementos finitos várias aproximações podem ser usadas. As diferentes aproximações dependem principalmente do tipo de elemento usado na discretização do domínio. Segundo Yang et al.(1990) a discretização geométrica de cascas pode ser feita usando quatro tipos básicos de elementos finitos:

- (1) Elementos planos de formato retangular, quadrangular e triangular.
- (2) Elementos de casca axissimétricos com os lados, ao longo do meridiano, retos ou curvos.
- (3) Elementos curvos de formato retangular, quadrangular e triangular baseados em teorias clássicas de casca.
- (4) Elementos derivados ou "degenerados" de elementos sólidos.

Uma discussão das vantagens e inconvenientes de cada uma destas aproximações é feita, entre outros, por Yang et al.(1990).

1.4 Revisão bibliográfica

1.4.1 Introdução

Nos últimos 25 anos pesquisadores vêm tentando construir o "melhor" elemento finito para problemas estruturais de cascas. Felippa e Militello (1989) apresentam os requisitos básicos que um elemento genérico deveria possuir:

- . Simples: poucos graus de liberdade, todos físicos, preferencialmente só nos vértices
- . Convergente
- . Invariante
- . Ausência de travamento (locking).
- . Posto suficiente: inexistência de modos espúrios
- . Rigidez balanceada: nem muito rígido nem muito flexível
- . Tensões tão precisas quanto deslocamentos
- . Pouco sensível à distorção
- . Misturável a outros elementos
- . Econômico para montar
- . Facilmente adaptável para análise não linear e dinâmica
- . Estimador de erro local eficiente para adaptividade

Lamentavelmente ainda não se chegou a formular, para cascas, um elemento que atenda a todos os requisitos acima.

Na formulação de elementos de casca o conceito de elemento "sólido degenerado", DC - Shell Element (Degenerated Continuum Shell Element) introduzido por Ahmad (1970) têm-se imposto em relação a formulações baseadas em teorias de casca clássicas [Chang et al. (1989)].

Os elementos degenerados apresentam como vantagens o fato de evitarem totalmente o uso de teorias de casca complexas, usarem funções de interpolação isoparamétricas C^0 e conseguirem representar os movimentos de corpo rígido para pequenos deslocamentos. Infelizmente este elemento apresenta alguns problemas [Donea e Belytschko (1989)]:

1. Rigidez excessiva ou travamento quando o elemento é totalmente integrado.
2. Modos espúrios quando o elemento é subintegrado.
3. Cisalhamento transversal oscilatório.
4. Perda de precisão dos elementos "sólido degenerado" quando distorcidos.

Para contornar estas dificuldades têm sido usados novos conceitos e formulações bem como diferentes princípios variacionais no desenvolvimento de elementos degenerados. Mas uma das principais dificuldades tem sido o comportamento dos elementos quando distorcidos. Quando um elemento degenerado é distorcido, prova-se que as condições de Babuska-Brezzi são violadas [Donea e Belytschko (1989)].

Apesar disso, recentemente alguns conceitos e formulações têm-se destacado para análise de cascas. Alguns desses trabalhos são citados em seguida.

Park e Stanley (1986) apresentaram um elemento baseado no conceito de deformações supostas em coordenadas naturais, (Assumed Natural Strains - ANS). Este elemento é caracterizado pelo uso de uma interpolação consistente das deformações de membrana, por uma representação adequada dos efeitos de curvatura e por possuir posto suficiente.

Huang e Hinton (1986) usaram o conceito de deformações supostas e uma representação tensorial para formular um elemento de casca curva degenerado. Neste elemento é usada uma interpolação das deformações cisalhantes transversais no sistema de coordenadas naturais de modo a evitar o surgimento de travamento de cisalhamento e uma interpolação das deformações de membrana no sistema cartesiano local para evitar o surgimento de travamento de membrana.

Riu e Lee (1987) propuseram um elemento sólido degenerado usando uma nova formulação mista. Nesta nova formulação mista o campo de deformações suposto foi dividido em uma parcela de baixa ordem e em uma parcela de ordem superior de modo a tornar esta formulação mais eficiente em termos computacionais que as formulações mistas tradicionais.

Salleb et al. (1987) apresentaram um elemento quadrilátero usando uma formulação mista baseada em deformações supostas. O campo de deformações supostas foi obtido escolhendo-se cuidadosamente os termos de deformação, de modo a eliminar todos os modos espúrios.

Simo e Fox (1989) desenvolveram uma formulação baseada na teoria clássica de cascas com um tipo de estrutura geométrica de Cosserat. O objetivo foi obter uma formulação partindo das equações constitutivas locais e da forma fraca das equações dos momentos, chegando-se a uma forma propícia para a análise numérica e implementação de um elemento finito.

Chang et al. (1989) apresentaram um elemento de cascas lagrangeano de 9 nós usando uma formulação mista baseada em deformações. Uma escolha cuidadosa do campo de deformações é feita de modo a evitar o surgimento de travamento e manter o acoplamento entre membrana e flexão. Para tal os campos de deformação são interpolados independentemente em coordenadas naturais.

1.4.2 Elementos finitos para cascas compostas

Para cascas de materiais compostos, embora vários estudos analíticos tenham sido efetuados, a formulação e desenvolvimento de elementos finitos não recebeu a mesma atenção que o desenvolvimento de elementos finitos para cascas isotrópicas.

Segundo Reddy (1982), para cascas ortotrópicas, os únicos elementos finitos apresentados anteriormente à década de 70 são devidos a Dong (1966), Wilson e Parsons (1969) e Schmit e Monforton (1970), sendo este último o único a analisar cascas laminadas anisotrópicas. Note-se que todos estes elementos são para uma geometria particular.

Nos anos 70 houve um aumento de interesse na análise por elementos finitos de cascas laminadas anisotrópicas. Aparentemente, segundo Reddy (1982), a primeira aplicação de elementos finitos para cascas laminadas anisotrópicas de geometria arbitrária foi feita por Thompson (1973). Reddy (1982) apresenta um breve resumo de trabalhos sobre cascas de material composto feitas anteriormente.

Kapania (1988) apresentou uma extensa revisão dos trabalhos publicados para cascas de material composto multilaminado. Especificamente este artigo aborda os seguintes assuntos: Teorias de casca espessa; Estudos analíticos de cascas compostas; Análise de flambagem e pós-flambagem de cascas laminadas perfeitas e imperfeitas; e Análise dinâmica transiente. Yang (1990) apresentou um estudo genérico sobre cascas no qual aborda cascas de material composto.

São referenciados, a seguir, alguns dos elementos finitos, baseados em modelos de lâminas equivalentes, que foram propostos para análise estática linear de cascas de material composto multilaminado

Reddy (1982) apresentou um elemento finito baseado em teorias generalizadas de casca com aproximação de cisalhamento de 1ª ordem. São apresentados, para elementos isoparamétricos de 4, 8 e 9 nós, resultados e tensões para cascas esféricas e cilíndricas bem como frequências naturais para cascas esféricas. Os elementos obtidos com estas teorias obtiveram bons resultados para cascas moderadamente espessas mas mostraram-se muito rígidos para cascas finas. Para contornar esta dificuldade, uma integração reduzida foi utilizada no cálculo dos coeficientes de

rígidez associados à energia de cisalhamento transversal. O autor não aborda eventuais problemas que este procedimento possa acarretar.

Haas e Lee (1987) apresentaram um elemento degenerado lagrangeano de casca que é uma extensão para materiais anisotrópicos multilaminados do elemento proposto por Lee et al. (1985) para cascas isotrópicas. Este elemento é baseado no Princípio de Hellinger-Reissner modificado. É um elemento misto de deformações supostas, sendo que estas são definidas independentemente nos planos longitudinal e transversal. São apresentados resultados de deslocamentos de placas para vários laminados. É analisado, para vários laminados um cilindro engastado nas extremidades sujeito a pressão interna. Por último, um quarto de cilindro engastado sujeito a pressão interna é analisado para vários laminados. O autor não apresenta resultados de tensões.

Wilt et al. (1990) apresentaram um elemento finito quadrilátero de 4 nós para cascas. Este elemento é uma extensão para materiais anisotrópicos multilaminados do elemento proposto por Saleeb et al. (1987). É um elemento misto de deformações supostas baseado no princípio de Hellinger-Reissner. O campo de deformações é independente de número de lâminas sendo um elemento MLE. Para eliminar problemas de travamento (locking) foram adicionados graus de liberdade cinemáticos referentes a uma função bolha. São apresentados resultados de deslocamento e esforços para várias geometrias de placa e para vários laminados. Analogamente a Haas e Lee (1987), são analisados, um cilindro engastado nas extremidades e um quarto de cilindro engastado, sujeitos a pressão interna. Os resultados obtidos são comparados com Haas e Lee (1987). É feita uma análise dinâmica, apresentando-se frequências naturais, para placas e cilindros com vários laminados. Deve-se ressaltar que o autor usou uma integração numérica na espessura e para tal usou quadraturas de Gauss de dois pontos por lâmina. Aparentemente este procedimento é, computacionalmente, muito dispendioso para laminados com grande número de lâminas. Não são apresentados resultados de tensões no laminado.

1.5 Objetivo do trabalho

Na análise de cascas de material composto geralmente são simulados problemas com geometrias complexas e que exigem uma razoável discretização do domínio. Impõe-se assim uma análise global, uma vez que uma análise local seria, hoje em dia, economicamente inviável. Torna-se portanto fundamental usar elementos que, dentro das limitações de uma análise global, representem o campo de deslocamentos e o campo de tensões de forma precisa.

Elementos baseados em Princípios variacionais mistos têm-se mostrado superiores, na determinação de esforços, a elementos baseados em formulações de deslocamentos convencionais [Felippa e Militello (1989)] bem como a elementos baseados em métodos ANS, ou que usem integração reduzida/seletiva que tendem a exibir uma convergência que é dependente das propriedades do material [Kang (1990)].

É proposto o desenvolvimento de um elemento misto de casca de dupla curvatura para análise de materiais compostos multilaminados. O desenvolvimento é baseado na extensão para cascas laminadas anisotrópicas elásticas da formulação isotrópica apresentada por Chang et al. (1989). Este elemento foi escolhido como base para o desenvolvimento, em virtude dos bons resultados apresentados pelos referidos autores na análise de cascas isotrópicas.

CAPÍTULO 2

MATERIAL COMPOSTO MULTILAMINADO

2.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas as relações constitutivas para um material composto multilaminado necessárias à formulação de um elemento finito de cascas baseado em um modelo de lâminas equivalentes. É também descrito um procedimento para melhorar o cálculo de tensões cisalhantes transversais interlaminares.

2.2. Análise de uma lâmina

Como as lâminas são um componente básico de um material composto multilaminado, torna-se então necessária uma análise cuidadosa do comportamento mecânico de uma lâmina, para se descrever o comportamento e as propriedades mecânicas de um laminado.

2.2.1 Relações constitutivas para um material anisotrópico

Um material é dito elástico ideal quando este recupera totalmente a sua forma original, em condições isotérmicas, quando retiradas as forças que causavam a deformação. Além disso deve existir uma relação linear entre o estado de tensões e o estado de deformações. A lei de Hooke generalizada relaciona as nove componentes de tensão às nove componentes de deformação:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.1)$$

onde ε_{kl} são as componentes do tensor deformações infinitesimais, σ_{ij} as componentes do tensor tensão de Cauchy e C_{ijkl} são as componentes do tensor relação constitutiva, ditas constantes elásticas.

Um material é dito homogêneo se os parâmetros de C_{ijkl} não variam de ponto para ponto. Um material cujas propriedades independem da direção analisada é dito isotrópico. Se as propriedades variam em função da orientação, o material é dito anisotrópico.

As nove equações expressas na eq. 2.1 possuem 81 parâmetros. Entretanto devido à simetria de ambos os tensores σ_{ij} e ϵ_{kl} , Reddy (1984a), restam 36 constantes para C_{ijkl} , visto que:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad ; \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (2.2)$$

Definindo uma notação contraída, Tab. 2.1, a relação 2.1 pode ser apresentada como:

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j \quad (2.3)$$

Dada a simetria de C , $C_{ij} = C_{ji}$, Jones (1975), restam 21 constantes independentes na relação constitutiva de um material anisotrópico.

Tabela 2.1

Tensões		Deformações	
Notação tensorial	Notação contraída	Notação tensorial	Notação contraída
σ_{11}	σ_1	ϵ_{11}	ϵ_1
σ_{22}	σ_2	ϵ_{22}	ϵ_2
σ_{33}	σ_3	ϵ_{33}	ϵ_3
$\tau_{23} = \sigma_{23}$	σ_4	$\gamma_{23} = 2 \epsilon_{23}$	ϵ_4
$\tau_{31} = \sigma_{31}$	σ_5	$\gamma_{31} = 2 \epsilon_{31}$	ϵ_5
$\tau_{12} = \sigma_{12}$	σ_6	$\gamma_{12} = 2 \epsilon_{12}$	ϵ_6

2.2.2 Relações constitutivas para uma lâmina de material ortotrópico

Uma lâmina de material composto possui diferentes comportamentos de acordo com as orientações das fibras. Entretanto, numa lâmina de composto podem-se distinguir certos planos de simetria das propriedades mecânicas. Um plano perpendicular às fibras é certamente um plano de simetria. Um plano perpendicular ao primeiro e paralelo à lâmina, na superfície média desta, é também de simetria. Se existe simetria de material em dois planos ortogonais, existirá simetria também relativamente a um

mente a um terceiro plano, ortogonal aos dois primeiros [Jones (1975)]. Materiais com três planos de simetria são ditos ortotrópicos.

As direções principais de um material ortotrópico (1,2,3) coincidem com as direções formadas pela intersecção dos três planos ortogonais de simetria das propriedades do material. Nas direções principais a relação constitutiva para materiais ortotrópicos é descrita por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ & C_{21} & C_{23} & & & \\ & & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ \text{sim.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

ou simbolicamente

$$\sigma = C \varepsilon \quad (2.5)$$

Pode-se definir a relação inversa fazendo-se

$$\varepsilon = C^{-1} \sigma \quad (2.6)$$

onde $C^{-1} = S$, é a matriz flexibilidade do material definida por:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{-\nu_{13}}{E_{11}} & & & \\ & \frac{1}{E_{22}} & \frac{-\nu_{23}}{E_{22}} & & & \\ & & \frac{1}{E_{33}} & & & \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & & \\ & & & & \frac{1}{G_{13}} & \\ \text{sim.} & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Note-se que, devido aos três planos de simetria, só existem nove constantes independentes na relação constitutiva de um material ortotrópico que são:

$$E_1, E_2, E_3, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{12}, G_{13}, G_{23}, G_{12} \quad (2.8)$$

onde

E_i = Módulo de elasticidade na direção i .

ν_{ij} = Coeficiente de poisson da deformação transversal na direção j relativa a uma deformação axial na direção i obtida por uma tensão na direção i.

G_{ij} = Módulo de cisalhamento na seção transversal i na direção j.

Normalmente as lâminas unidirecionais de material composto são transversalmente isotrópicas. Nestas, o plano 2-3 é o plano de simetria. Em função disso:

$$E_3 = E_2 ; \quad \nu_{13} = \nu_{12} ; \quad G_{13} = G_{12} \quad (2.9)$$

$$G_{23} = \frac{E_{22}}{2(1 + \nu_{23})} \quad (2.10)$$

Assim, para uma lâmina transversalmente isotrópica no plano 2-3 tem-se cinco constantes independentes:

$$E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}, G_{23} \quad (2.11)$$

2.2.3 Relações constitutivas para uma lâmina numa direção arbitrária.

Foi mencionado anteriormente que um material multilaminado é construído sobrepondo-se várias lâminas orientadas segundo uma sequência específica. Em outras palavras, as direções principais do material de cada lâmina fazem diferentes ângulos com um sistema de coordenadas comum. As lâminas, descritas relativamente às direções principais, são ortotrópicas e obedecem às relações constitutivas descritas anteriormente, eq. 2.4. Entretanto para análise de estruturas multilaminadas é conveniente, de fato necessário, referir as relações constitutivas a um sistema de coordenadas comum [Agarwal e Broutman (1980)]. Para tanto são obtidas as relações constitutivas de uma lâmina numa direção arbitrária.

As relações constitutivas para uma lâmina ortotrópica com orientação qualquer são obtidas através de uma transformação tensorial [Whitney (1987)]. A relação constitutiva \bar{C} , expressa no sistema de coordenadas de referência, é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ & \bar{C}_{21} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ & & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \text{sim.} & & & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

as componentes \bar{C}_{ij} são dados por:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= C_{11} \cos^4\theta + 2 \cos^2\theta \sin^2\theta (C_{12} + 2 C_{66}) + C_{22} \sin^4\theta \\ \bar{C}_{12} &= \cos^2\theta \sin^2\theta (C_{11} + C_{22} - 4 C_{66}) + C_{12} (\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\ \bar{C}_{13} &= C_{13} \cos^2\theta + C_{23} \sin^2\theta \\ \bar{C}_{16} &= \cos\theta \sin\theta [C_{11} \cos^2\theta - C_{22} \sin^2\theta - (C_{12} + 2 C_{66}) * (\cos^2\theta - \sin^2\theta)] \\ \bar{C}_{22} &= C_{11} \cos^4\theta + 2 \cos^2\theta \sin^2\theta (C_{12} + 2 C_{66}) + C_{22} \sin^4\theta \\ \bar{C}_{23} &= C_{13} \sin^2\theta + C_{23} \cos^2\theta \\ \bar{C}_{26} &= \cos\theta \sin\theta [C_{11} \sin^2\theta - C_{22} \cos^2\theta + (C_{12} + 2 C_{66}) * (\cos^2\theta - \sin^2\theta)] \\ \bar{C}_{33} &= C_{33} \\ \bar{C}_{36} &= - (C_{23} - C_{13}) \sin\theta \cos\theta \\ \bar{C}_{44} &= C_{44} \cos^2\theta + C_{55} \sin^2\theta \\ \bar{C}_{45} &= - (C_{44} - C_{55}) \sin\theta \cos\theta \\ \bar{C}_{55} &= C_{44} \sin^2\theta + C_{55} \cos^2\theta \\ \bar{C}_{66} &= (C_{11} + C_{22} - 2 C_{12}) \cos^2\theta \sin^2\theta + C_{66} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde C_{ij} são as componentes da relação constitutiva nas direções principais do material, eq. 2.4; (x,y,z) o sistema de coordenadas de referência, por exemplo o do laminado, em relação ao qual \bar{C} está definido, note que a direção z coincide sempre com a direção 3; e θ é o ângulo entre a direção principal do material e a direção do sistema de coordenadas de referência, fig. 2.1. Note-se que o material representado pela relação constitutiva \bar{C} não é ortotrópico.

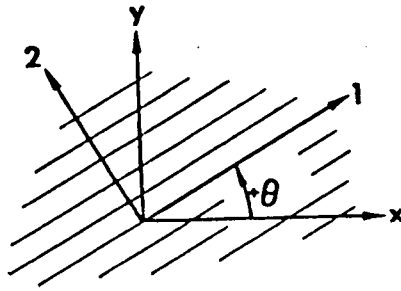


Fig. 2.1 Rotação positiva dos eixos principais do material a partir dos eixos x y arbitrários

2.2.4 Relações constitutivas para uma lâmina no estado plano de tensões

Para lâminas de material compostos, em virtude da espessura ser muito menor que as outras duas dimensões a aproximação de estado plano de tensões é usual. Assim a componente de tensão normal σ_z é suposta pequena em comparação com as outras tensões normais e é desprezada. Levando em conta esta suposição, e eliminando σ_z das relações tensão-deformação obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ & Q_{22} & Q_{26} \\ \text{sim.} & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ \text{sim} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

onde:

$$Q_{ij} = \bar{C}_{ij} - \frac{\bar{C}_{13} \bar{C}_{j3}}{\bar{C}_{33}} \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (2.17)$$

$$Q_{ij} = \bar{C}_{ij} \quad i, j = 4, 5 \quad (2.18)$$

A relação tensão-deformação expressa por Q_{ij} é conhecida por matriz de rigidez reduzida do material [Whitney (1987)].

2.3 Relações constitutivas para um laminado

Como já visto, um laminado é um conjunto de lâminas perfeitamente coladas entre si. É portanto um meio heterogêneo. Uma análise baseada em um modelo de lâminas equivalente representa o laminado como sendo um meio homogêneo equivalente. Assim, é necessário determinar as propriedades resultantes do laminado. Estas serão descritas em relação a uma superfície de referência, normalmente a superfície média do laminado.

Convém ressaltar que só faz sentido falar em relações constitutivas para um laminado no caso de uma análise por um modelo de lâmina equivalente. Neste trabalho supõe-se que o laminado esteja perfeitamente colado, e não se admite a existência de delaminação no composto.

Numa teoria de deformação cisalhante de 1ª ordem as deformações do laminado, e , são obtidas a partir das deformações da superfície média, $\{\epsilon\}$, $\{\kappa\}$ e $\{\gamma\}$. Para placas e cascas, as deformações, para um sistema local, são expressas por [Haas e Lee (1987)]:

$$e = \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \gamma \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

sendo:

$$e^T = \{ \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz} \} \quad (2.20)$$

$$\{\epsilon\}^T = \{ \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy} \}^0 \quad (2.21)$$

$$\{\kappa\}^T = \{ \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy} \}^0 \quad (2.22)$$

$$\{\gamma\}^T = \{ \gamma_{yz}, \gamma_{xz} \}^0 \quad (2.23)$$

onde $\{\epsilon\}$ são as deformações no plano da superfície média de referência, $\{\gamma\}$ são as deformações cisalhantes transversais da superfície média e $\{\kappa\}$ são as mudanças de curvaturas da superfície média de referência.

As tensões para cada lâmina são expressas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ & Q_{22} & Q_{26} \\ \text{sim.} & & Q_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \quad (2.24)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ \text{sim} & Q_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Os esforços e momentos resultantes atuando no laminado são obtidos por integração das tensões em cada lâmina ao longo da espessura do laminado, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (2.26)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (2.27)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_k dz \quad (2.28)$$

onde N são os esforços normais, Q os esforços cisalhantes transversais e M os momentos resultantes, h é a espessura total do laminado, n é o número total de lâminas do laminado e z_k e z_{k-1} são cotas ao longo da espessura do laminado que definem a distância, das superfícies superior e inferior da lâmina k , à superfície média de referência do laminado, figura 2.2.

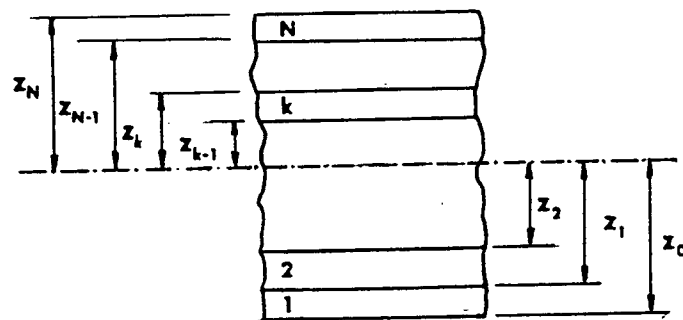


Fig. 2.2 Geometria de um elemento com N lâminas

Substituindo as relações constitutivas (eqs. 2.24-5) nas equações 2.26-8, pode-se rearranjar as integrações indicadas tirando-se proveito do fato da matriz de rigidez reduzida da lâmina ser constante ao longo da lâmina¹. Então a matriz de rigidez da lâmina sai da integração na espessura mas permanece no somatório do número de lâminas.

¹ Exceto quando existir um gradiente não nulo de temperatura.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ & Q_{22} & Q_{26} \\ \text{sim.} & & Q_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\epsilon\} dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\kappa\} z dz \right\} \quad (2.29)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ & Q_{22} & Q_{26} \\ \text{sim.} & & Q_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\epsilon\} z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\kappa\} z^2 dz \right\} \quad (2.30)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ \text{sim} & Q_{55} \end{bmatrix}_k \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\gamma\} dz \right\} \quad (2.31)$$

Note que, uma vez a integração das tensões efetuada em z , os esforços e momentos resultantes não dependem mais de z , mas são somente função das coordenadas x e y da superfície média da lâmina. Deve-se lembrar que as deformações $\{\epsilon\}$, $\{\kappa\}$ e $\{\gamma\}$ não são função de z , mas definidas na superfície média do laminado. Pode-se então retirá-las da integral. As equações 2.29-31 podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\{N\} = [A] \{\epsilon\} + [B] \{\kappa\} \quad (2.32)$$

$$\{M\} = [B] \{\epsilon\} + [D] \{\kappa\} \quad (2.33)$$

$$\{Q\} = [AS] \{\gamma\} \quad (2.34)$$

onde

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad i,j= 1,2,6 \quad (2.35)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad i,j= 1,2,6 \quad (2.36)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad i,j= 1,2,6 \quad (2.37)$$

$$AS_{ij} = \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad i,j= 4,5 \quad (2.38)$$

onde $Q_{ij}^{(k)}$ é a matriz de rigidez reduzida do material para a lâmina k , eqs. 2.17-8.

A matriz **A**, rigidez extensional, relaciona a deformação de membrana aos esforços resultantes normais; **B**, matriz rigidez de acoplamento, acopla a deformação de membrana aos momentos resultantes ou acopla a mudança de curvatura aos esforços normais; **D**, matriz rigidez de flexão, relaciona a mudança de curvatura aos momentos resultantes, e **AS**, matriz rigidez de cisalhamento transversal, relaciona a deformação cisalhante transversal ao esforço cortante.

2.4 Cálculo de tensões cisalhantes transversais

Elementos finitos baseados em modelos de lâminas equivalentes e teorias de deformação de 1ª ordem apresentam resultados sofríveis para tensões cisalhantes transversais.

Nestes elementos, a deformação cisalhante transversal é aproximada por um valor constante ao longo da espessura do laminado, eq. 2.19. Isto implica que as tensões cisalhantes transversais têm um valor constante em cada lâmina, eq. 2.25, sendo portanto descontínuas nas interfaces.

A descontinuidade de tensões cisalhantes transversais nas interfaces das lâminas viola o equilíbrio de forças [Chou e Carleone (1973)]. Obtém-se resultados mais precisos se as tensões cisalhantes transversais forem obtidas através das equações de equilíbrio tridimensionais [Pryor e Barker (1971) e Engblon e Ochoa (1986)].

Das equações de equilíbrio, desprezando-se as forças de campo, obtém-se:

$$\tau_{yz,z} = -(\sigma_{yy,y} + \tau_{xy,x}) \quad (2.39)$$

$$\tau_{xz,z} = -(\sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y}) \quad (2.40)$$

A partir das equações acima, as tensões cisalhantes transversais podem ser obtidas, integrando-se na espessura, as derivadas das tensões planas, $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$.

As equações de equilíbrio podem ser discretizadas para cada lâmina pertencente a um laminado, ou seja:

$$\left(\frac{\Delta \tau_{yz}}{\Delta z} \right)_k = -(\sigma_{yy,y} + \tau_{xy,x})_k \quad (2.41)$$

Esta equação representa, para a lâmina k , a taxa de variação da tensão cisalhante transversal ao longo da sua espessura. Pode-se rearranjar a equação fazendo

$$(\Delta\tau_{yz})_k = -(\sigma_{yy,y} + \tau_{xy,x})_k (\Delta z)_k \quad (2.42)$$

onde a equação representa a variação da tensão cisalhante na lâmina k , ou seja desde a superfície inferior até a superfície superior da lâmina k , isto é:

$$(\Delta\tau_{yz})_k = (\tau_{yz}^{\text{sup}} - \tau_{yz}^{\text{inf}})_k \quad (2.43)$$

$$(\Delta z)_k = (z^{\text{sup}} - z^{\text{inf}})_k = h_k \quad (2.44)$$

sendo h_k a espessura da lâmina k .

Dado que as tensões planas variam linearmente com z , eq. 2.24, as tensões cisalhantes transversais podem ser calculadas na superfície média da lâmina. Assim, a variação da tensão cisalhante transversal, entre a superfície superior e inferior de uma lâmina, é obtida através das derivadas das tensões planas na superfície média e da espessura da lâmina.

$$(\tau_{yz}^{\text{sup}} - \tau_{yz}^{\text{inf}})_k = -(\sigma_{yy,y} + \tau_{xy,x})_k h_k \quad (2.45)$$

fazendo

$$I_{yz}^k = -(\sigma_{yy,y} + \tau_{xy,x})_k h_k \quad (2.46)$$

chega-se a:

$$(\tau_{yz}^{\text{sup}} - \tau_{yz}^{\text{inf}})_k = I_{yz}^k \quad (2.47)$$

Aplicando a eq. 2.47 para um laminado de n lâminas obtém-se n equações:

$$\begin{aligned} (\tau_{yz}^{\text{sup}} - \tau_{yz}^{\text{inf}})_1 &= I_{yz}^1 \\ (\tau_{yz}^{\text{sup}} - \tau_{yz}^{\text{inf}})_2 &= I_{yz}^2 \\ &\vdots \\ (\tau_{yz}^{\text{sup}} - \tau_{yz}^{\text{inf}})_n &= I_{yz}^n \end{aligned} \quad (2.48)$$

Das condições de equilíbrio nas interfaces das lâminas, tem-se que (Chou e Carleone, 1973):

$$(\tau_{yz}^{\text{sup}})_1 = (\tau_{yz}^{\text{inf}})_2 \quad (2.49)$$

genericamente

$$(\tau_{yz}^{\text{sup}})_1 = (\tau_{yz}^{\text{inf}})_{1+1} \quad (2.50)$$

Então, fazendo

$$\begin{aligned} (\tau_{yz}^{\text{inf}})_1 &= \tau_{yz}^0 \\ (\tau_{yz}^{\text{sup}})_1 &= (\tau_{yz}^{\text{inf}})_2 = \tau_{yz}^1 \\ (\tau_{yz}^{\text{sup}})_2 &= (\tau_{yz}^{\text{inf}})_3 = \tau_{yz}^2 \\ &\vdots \\ (\tau_{yz}^{\text{sup}})_{n-1} &= (\tau_{yz}^{\text{inf}})_n = \tau_{yz}^{n-1} \\ (\tau_{yz}^{\text{sup}})_n &= \tau_{yz}^n \end{aligned} \quad (2.51)$$

pode-se reescrever o sistema de equações 2.48 do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \tau_{yz}^1 - \tau_{yz}^0 &= I_{yz}^1 \\ \tau_{yz}^2 - \tau_{yz}^1 &= I_{yz}^2 \\ &\vdots \\ \tau_{yz}^n - \tau_{yz}^{n-1} &= I_{yz}^n \end{aligned} \quad (2.52)$$

Nota-se que o sistema acima possui n equações e $n+1$ incógnitas (n lâminas e $n-1$ interfaces mais duas faces) ou seja, $n+1$ tensões cisalhantes transversais a determinar.

Considerando que as faces superior e inferior do laminado estão livres de cisalhamento transversal, hipótese correta desde que não haja forças externas de cisalhamento atuando na superfície, Reddy e Liu (1985), tem-se:

$$\tau_{yz}^0 = \tau_{yz}^n = 0 \quad (2.53)$$

Eliminam-se assim duas incógnitas do sistema de equações 2.52, obtém-se um sistema de equações com $n-1$ incógnitas, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{yz}^1 \\ \tau_{yz}^2 \\ \tau_{yz}^{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{yz}^1 \\ I_{yz}^2 \\ I_{yz}^n \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

simbolicamente

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.55)$$

onde

\mathbf{A} é uma matriz retangular $n \times (n-1)$

\mathbf{x} é um vetor de dimensão $(n-1) \times 1$

\mathbf{b} é um vetor de dimensão $n \times 1$

O sistema acima tem n equações correspondentes a n lâminas e $n-1$ incógnitas correspondentes a $n-1$ interfaces entre lâminas.

Este problema é solucionado usando um procedimento de ortogonalização por mínimos quadrados.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} (A_{ij} x_j - b_i)^2 = 0 \quad (2.56)$$

de onde obtém-se um sistema de equações do tipo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & \\ & & & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{yz}^1 \\ \tau_{yz}^2 \\ \tau_{yz}^3 \\ \tau_{yz}^{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{yz}^1 - I_{yz}^2 \\ I_{yz}^2 - I_{yz}^3 \\ I_{yz}^3 - I_{yz}^4 \\ I_{yz}^{n-1} - I_{yz}^n \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

Resolvendo o sistema de equações acima, obtém-se as tensões cisalhantes interlaminares via equações de equilíbrio. Um procedimento análogo é usado para determinar as tensões cisalhantes transversais interlaminares τ_{xz} .

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO E DESENVOLVIMENTO

3.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada a formulação de um elemento finito para cascas de materiais compostos multilaminados. O laminado é representado a partir de um modelo de lâmina equivalente, sendo portanto o número de graus de liberdade do elemento finito independente do número de lâminas do laminado. O desenvolvimento do elemento se baseia na extensão, para cascas multilaminadas elásticas, da formulação isotrópica apresentada por Chang et al.(1989).

3.2 Descrição do elemento finito

3.2.1 Apresentação

O elemento lagrangeano de nove nós proposto por Chang et al.(1989), é um típico elemento degenerado de casca, e deriva de um método misto baseado em deformações. A sua formulação usa o Princípio de Hellinger-Reissner modificado [Washizu (1982)]. Na obtenção das equações, um campo de deformações é suposto a nível de elemento independentemente daquele proveniente do campo de deslocamentos. As deformações supostas são definidas no sistema natural e são eliminadas, a nível de elemento, antes da obtenção da matriz de rigidez do elemento. As equações assim obtidas têm como incógnitas apenas deslocamentos e rotações como em elementos provenientes de formulações de deslocamentos oriundos do Princípio da Energia Potencial Total.

3.2.2 Sistemas de coordenadas

Para a descrição e formulação de um elemento degenerado são usados quatro sistemas de coordenadas, Fig. 3.1:

- (1) Sistema Global de coordenadas (X,Y,Z) . É um sistema cartesiano de referência em relação ao qual estão definidos as coordenadas e os graus de liberdade de translação, U,V e W de cada nó.
- (2) Sistema de coordenadas Natural (ξ,η,ζ) . É um sistema usado na formulação isoparamétrica em relação ao qual são definidas as funções de interpolação N_i . A superfície média da casca é definida pelas coordenadas ξ e η . A direção ζ é aproximadamente normal à superfície média. As coordenadas variam entre -1 e 1 .
- (3) Sistema de coordenadas Local (x,y,z) . É usado para definir deformações e tensões locais em um ponto qualquer da casca. Nesse ponto o sistema é definido sobre uma superfície $\zeta = \text{constante}$, à qual z é considerado normal. A direção de z é obtida através de um produto vetorial entre os vetores tangentes a ξ e η .
- (4) Sistema de coordenadas Nodal (v_x, v_y, v_z) é construído em cada nó do elemento. O vetor v_z define a direção da normal no nó, embora esta não seja obrigatoriamente perpendicular à superfície média no nó. Esta "normal" é obtida tomando-se uma média, no nó, das direções z de todos os elementos que compartilham desse nó. Eventualmente esta direção pode ser fornecida previamente.

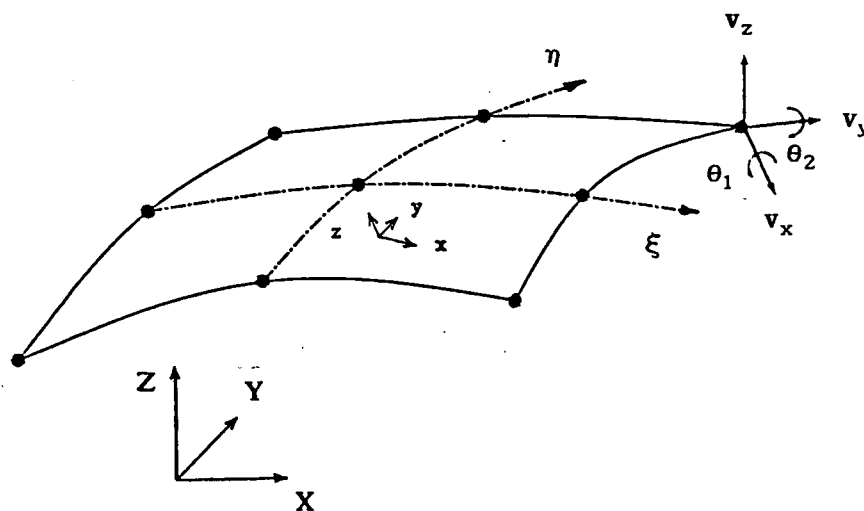


Fig. 3.1 Sistemas de coordenadas

3.2.3 Geometria e cinemática

A geometria do elemento é definida, na superfície média, pelas coordenadas globais dos nós. A localização de qualquer ponto material genérico, P, dentro de uma casca indeformada, pode ser definido por um vetor posição \mathbf{r} dado por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + z \mathbf{v}_z \quad (3.1)$$

onde \mathbf{r}_0 é um vetor desde a origem até ao ponto O, na superfície média da casca, e $z \mathbf{v}_z$ é um vetor do ponto O até ao ponto P, na direção normal à superfície média.

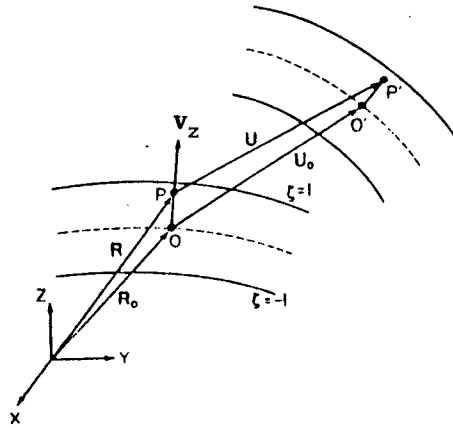


Fig. 3.2 Geometria e cinemática

Usando o sistema de coordenadas Natural a eq. 3.1 pode ser escrita como:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \zeta \frac{h}{2} \mathbf{v}_z \quad (3.2)$$

onde a espessura da casca é h e ζ varia entre -1 e 1 .

Considerando que o comprimento de uma linha normal a superfície média não se altera quando a casca se deforma, o vetor deslocamento global \mathbf{u} pode ser expresso como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \zeta \frac{h}{2} [-\theta_1 \mathbf{v}_y + \theta_2 \mathbf{v}_x] \quad (3.3)$$

onde \mathbf{u}_0 é o deslocamento translacional global do ponto O e θ_1 e θ_2 são os ângulos rotacionais de \mathbf{v}_z em torno da direção dos vetores \mathbf{v}_x e \mathbf{v}_y , respectivamente.

Para um elemento de casca degenerado de nove nós o vetor posição, r , de um ponto do elemento pode ser interpolado a partir dos valores nodais usando-se nove funções de interpolação lagrangeanas, $N_i(\xi, \eta)$ tal que:

$$r(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^9 N_k r_{0k} + \frac{1}{2} \zeta \sum_{k=1}^9 N_k h_k v_{z_k} \quad (3.4)$$

sendo h_k e v_{z_k} , respectivamente, a espessura e a normal em cada nó. O vetor posição r define as coordenadas globais X, Y, Z de um ponto genérico da casca e r_{0k} define as coordenadas globais dos nós do elemento. Então para um ponto da casca (ξ, η, ζ) as coordenadas globais são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^9 N_k \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_k + \frac{1}{2} \zeta \sum_{k=1}^9 N_k h_k v_{z_k} \quad (3.5)$$

Analogamente os deslocamentos globais são dados por:

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^9 N_k u_{0k} + \frac{1}{2} \zeta \sum_{k=1}^9 N_k h_k \begin{bmatrix} -\theta_1 v_y + \theta_2 v_x \end{bmatrix}_k \quad (3.6)$$

onde u é o vetor deslocamento de translação global de um ponto genérico e u_{0k} e θ_{1k} são respectivamente os deslocamentos de translação globais e rotações do nó k . Então:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^9 N_k \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}_k + \frac{1}{2} \zeta \sum_{k=1}^9 N_k h_k \begin{bmatrix} -v_y & v_x \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}_k \quad (3.7)$$

A equação 3.7 pode ser escrita simbolicamente como:

$$u = \bar{N} q_e \quad (3.8)$$

onde todas as N_k funções de interpolação foram agrupadas em \bar{N} obtendo-se uma matriz de dimensão 3×45 , e q_e um vetor 45×1 contendo os graus de liberdade nodais do elemento dados por:

$$q_e^T = \{ U_1, V_1, W_1, \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, U_2, V_2, \dots, U_9, V_9, W_9, \theta_1^{(9)}, \theta_2^{(9)} \} \quad (3.9)$$

3.2.4 Deformações

Com a descrição da geometria e dos deslocamentos dados acima, pode-se facilmente obter uma relação entre o vetor deformações globais, $\bar{\mathbf{e}}^g$, e o vetor dos graus de liberdade nodais do elemento, \mathbf{q}_e , ou seja $\bar{\mathbf{e}}^g$ pode ser escrito simbolicamente como:

$$\bar{\mathbf{e}}^g = \mathbf{B}_0^g \mathbf{q}_e + \zeta \mathbf{B}_1^g \mathbf{q}_e \quad (3.10)$$

onde \mathbf{B}_0^g e \mathbf{B}_1^g são as matrizes relação deslocamento-deformação e são apresentadas no Apêndice A. O vetor deformações globais $\bar{\mathbf{e}}^g$ é dado por:

$$\bar{\mathbf{e}}^{gT} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial X}, \frac{\partial V}{\partial Y}, \frac{\partial W}{\partial Z}, \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right), \left(\frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y} \right), \left(\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial X} \right) \right\} \quad (3.11)$$

Uma vez que ambas as matrizes, \mathbf{B}_0^g e \mathbf{B}_1^g , são derivadas de $\bar{\mathbf{N}}$, eq. 3.8, então são função das coordenadas naturais ξ e η . É portanto necessária uma transformação jacobiana, Saleeb et al. (1987). Note que a parcela $\mathbf{B}_0^g \mathbf{q}_e$ não depende da coordenada ζ sendo somente função da superfície média, enquanto que a parcela $\mathbf{B}_1^g \mathbf{q}_e$ depende da coordenada ζ .

Para obter as equações de elementos finitos a partir de um princípio variacional, deve-se escolher o sistema de coordenadas em relação ao qual serão definidas as deformações. O sistema local foi escolhido pelas seguintes razões, Chang et al.(1989):

- .(1) é relativamente fácil impor a condição de tensão normal nula.
- .(2) é um sistema natural para definir as relações constitutivas.
- .(3) é fácil satisfazer, para as deformações supostas, a invariância.

As deformações expressas em um sistema de coordenadas local, $\bar{\mathbf{e}}$, podem ser obtidas através de uma transformação de deformações:

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{T}_E \bar{\mathbf{e}}^g \quad (3.12)$$

sendo \mathbf{T}_E a matriz transformação de deformações que é apresentada no Apêndice B.

O vetor de deformações locais pode ser separado em três parcelas; membrana, flexão e cisalhamento transversal, ou seja:

$$\bar{\mathbf{e}} = \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \bar{\boldsymbol{\gamma}} \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\kappa}} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

onde

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}^0 = \mathbf{B}_m \mathbf{q}_e \quad (3.14)$$

é o vetor deformação de membrana definido na superfície média;

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}} = \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_x \\ \bar{\kappa}_y \\ \bar{\kappa}_{xy} \end{Bmatrix}^0 = \mathbf{B}_b \mathbf{q}_e \quad (3.15)$$

é o vetor deformação de flexão definido na superfície média;

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_{yz} \\ \bar{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix}^0 = \mathbf{B}_s \mathbf{q}_e \quad (3.16)$$

é o vetor deformação cisalhante transversal definido na superfície média.

As matrizes \mathbf{B}_m , \mathbf{B}_b e \mathbf{B}_s são obtidas a partir da substituição das equações 3.10 e 3.12 na equação 3.13. Estas matrizes relacionam os deslocamentos nodais às deformações locais.

3.3 Equações de elementos finitos

As equações para o elemento finito são deduzidas do princípio variacional de Hellinger-Reissner modificado que é expresso em termos de deslocamentos e deformações. O funcional, num sistema de coordenadas locais, Chang et al.(1989), é dado para um elemento por:

$$\Pi_{Rme} = \int_{V_e} \left(\mathbf{e}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{e}} - \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{D} \mathbf{e} \right) dv - W_e \quad (3.17)$$

onde:

\mathbf{e} vetor de deformações supostas.

$\bar{\mathbf{e}}$ vetor de deformações, isto é deformações provenientes dos deslocamentos \mathbf{q}_e .

$dv = dx dy dz = |J| d\xi d\eta d\zeta$

\mathbf{D} matriz rigidez do material

W_e potencial devido às forças externas aplicadas

Simplificadamente o funcional pode ser definido como:

$$\Pi_{mRe} = U_e - W_e \quad (3.18)$$

onde U_e é a energia devido a deformação elástica. As deformações em um sistema local podem ser desacopladas conforme a equação 3.13, então as várias parcelas da energia de deformação também podem ser localmente desacopladas, isto é:

$$U_e = U_m + U_b + U_s + U_a \quad (3.19)$$

onde U_e é a soma das seguintes parcelas de energia de deformação:

$$U_m = \int \left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}_p \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}_p \boldsymbol{\varepsilon} \right) dv \quad (3.20)$$

parcela correspondente à energia de deformação de membrana;

$$U_b = \int \left(\boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{C}_p \bar{\boldsymbol{\kappa}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{C}_p \boldsymbol{\kappa} \right) \zeta^2 dv \quad (3.21)$$

parcela correspondente à energia de deformação de flexão;

$$U_s = \int \left(\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_t \bar{\boldsymbol{\gamma}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_t \boldsymbol{\gamma} \right) dv \quad (3.22)$$

parcela correspondente à energia de deformação cisalhante transversal;

$$U_a = \frac{1}{2} \int (\bar{\kappa}^T C_p \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^T C_p \bar{\kappa}) \zeta dv \quad (3.23)$$

parcela correspondente à energia de deformação de acoplamento membrana-flexão devido ao material, sendo:

ε, κ e γ = Vetores de deformações supostas.

$\bar{\varepsilon}, \bar{\kappa}$ e $\bar{\gamma}$ = Vetores de deformações, isto é deformações provenientes dos deslocamentos, q_e .

$$dv = dx dy dz = |J| d\xi d\eta d\zeta$$

$|J|$ = determinante da matriz Jacobiano

C_p e C_t = Matrizes relação tensão-deformação dadas por:

$$C_p = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21} E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12} E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$C_t = k \begin{bmatrix} G_{23} & 0 \\ 0 & G_{13} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

E_i = Módulo de Young na direção i.

G_{ij} = Módulo de cisalhamento na seção transversal i na direção j.

ν_{21}, ν_{12} = Coeficiente de Poisson

k = Fator de correção do cisalhamento transversal. $k = 5/6$

Na formulação usada, as deformações ε , $\bar{\varepsilon}$, κ , $\bar{\kappa}$, γ e $\bar{\gamma}$ são referenciadas à superfície média e constantes ao longo da espessura do elemento. Numa análise elástica linear o determinante do Jacobiano, $|J|$, pode ser considerado constante ao longo da espessura. Portanto nas eqs. 3.20-23 os únicos integrandos que dependem de ζ são as relações tensão-deformação. O funcional de Hellinger-Reissner modificado pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\Pi_{Rme} = & \int \left(\varepsilon^T \mathbf{A} \bar{\varepsilon} - \frac{1}{2} \varepsilon^T \mathbf{A} \varepsilon \right) da \\
& + \int \left(\kappa^T \mathbf{D} \bar{\kappa} - \frac{1}{2} \kappa^T \mathbf{D} \kappa \right) da \\
& + \int \left(\gamma^T \mathbf{AS} \bar{\gamma} - \frac{1}{2} \gamma^T \mathbf{AS} \gamma \right) da \\
& + \frac{1}{2} \int \left(\bar{\kappa}^T \mathbf{B} \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^T \mathbf{B} \bar{\kappa} \right) da \\
& - W_e
\end{aligned} \tag{3.26}$$

onde

$$da = |J|_{\zeta=0} d\xi d\eta \tag{3.27}$$

$$\mathbf{A} = \int_{-1}^1 \mathbf{C}_e d\zeta \tag{3.28}$$

$$\mathbf{D} = \int_{-1}^1 \mathbf{C}_e \zeta^2 d\zeta \tag{3.29}$$

$$\mathbf{B} = \int_{-1}^1 \mathbf{C}_e \zeta d\zeta \tag{3.30}$$

$$\mathbf{AS} = \int_{-1}^1 \mathbf{C}_t d\zeta \tag{3.31}$$

são matrizes relação tensão-deformação. Matrizes análogas foram obtidas no Capítulo 2 para um material composto multilaminado, eqs. 2.35-38.

Num método misto baseado em deformações, o vetor deformações supostas, \mathbf{e} , é obtido a partir das deformações generalizadas β :

$$\mathbf{e} = \mathbf{P} \beta \tag{3.32}$$

onde \mathbf{P} é uma matriz de interpolação de deformações generalizadas que será definida posteriormente. O vetor \mathbf{e} pode ser expresso por:

$$\mathbf{e} = [\varepsilon \ \kappa \ \gamma] = \mathbf{P} \beta \tag{3.33}$$

onde

$$\varepsilon = \mathbf{P}_m \beta_m \quad (3.34)$$

$$\kappa = \mathbf{P}_b \beta_b \quad (3.35)$$

$$\gamma = \mathbf{P}_s \beta_s \quad (3.36)$$

Substituindo as eqs. 3.14-16 e 3.34-36 no funcional, eq. 3.26, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Pi_{Rme} = & \left[\left(\beta_m^T \mathbf{G}_m \mathbf{q}_e - \frac{1}{2} \beta_m^T \mathbf{H}_m \beta_m \right) + \right. \\ & \left(\beta_b^T \mathbf{G}_b \mathbf{q}_e - \frac{1}{2} \beta_b^T \mathbf{H}_b \beta_b \right) + \\ & \left(\beta_s^T \mathbf{G}_s \mathbf{q}_e - \frac{1}{2} \beta_s^T \mathbf{H}_s \beta_s \right) + \\ & \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \left(\mathbf{D}_a + \mathbf{D}_a^T \right) \mathbf{q}_e \right) - \\ & \left. \mathbf{q}_e^T \mathbf{f}_e \right] \quad (3.37) \end{aligned}$$

onde as seguintes matrizes foram definidas:

$$\mathbf{G}_m = \int \mathbf{P}_m^T \mathbf{A} \mathbf{B}_m \, da \quad (3.38)$$

$$\mathbf{H}_m = \int \mathbf{P}_m^T \mathbf{A} \mathbf{P}_m \, da \quad (3.39)$$

$$\mathbf{G}_b = \int \mathbf{P}_b^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b \, da \quad (3.40)$$

$$\mathbf{H}_b = \int \mathbf{P}_b^T \mathbf{D} \mathbf{P}_b \, da \quad (3.41)$$

$$\mathbf{G}_s = \int \mathbf{P}_s^T \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{B}_s \, da \quad (3.42)$$

$$\mathbf{H}_s = \int \mathbf{P}_s^T \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{P}_s \, da \quad (3.43)$$

$$\mathbf{D}_a = \int \mathbf{B}_m^T \mathbf{B} \mathbf{B}_b \, da \quad (3.44)$$

e \mathbf{f}_e é o vetor força nodal do elemento

Usando uma condição estacionária de Π_{Rme} em relação a β , isto é, fazendo $\delta \Pi_{Rme} = 0$ em relação a β , a fim de se eliminar as deformações supostas a nível de elemento, obtem-se:

$$G_m q_e - H_m \beta_m = 0 \quad (3.45)$$

$$G_b q_e - H_b \beta_b = 0 \quad (3.46)$$

$$G_s q_e - H_s \beta_s = 0 \quad (3.47)$$

resolvendo para os β 's, obtem-se:

$$\beta_m = H_m^{-1} G_m q_e \quad (3.48)$$

$$\beta_b = H_b^{-1} G_b q_e \quad (3.49)$$

$$\beta_s = H_s^{-1} G_s q_e \quad (3.50)$$

substituindo as equações 3.48-50 na expressão do funcional, eq. 3.37, e fazendo um somatório sobre todos os elementos, obtem-se:

$$\begin{aligned} \Pi_{Rm} = \sum \Pi_{Rme} = \sum \left[\frac{1}{2} q_e^T G_m^T H_m^{-1} G_m q_e + \right. \\ \left. \frac{1}{2} q_e^T G_b^T H_b^{-1} G_b q_e + \right. \\ \left. \frac{1}{2} q_e^T G_s^T H_s^{-1} G_s q_e + \right. \\ \left. \frac{1}{2} q_e^T (D_a + D_a^T) q_e - q_a^T f_e \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

ou

$$\Pi_{Rm} = \sum \left[\frac{1}{2} q_e^T K_e q_e - q_e^T f_e \right] \quad (3.52)$$

onde K_e é a matriz de rigidez do elemento obtida pela soma das parcelas:

$$K_e = K_m + K_b + K_s + K_a \quad (3.53)$$

ou seja

$$K_e = G_m^T H_m^{-1} G_m + G_b^T H_b^{-1} G_b + G_s^T H_s^{-1} G_s + (D_a + D_a^T) \quad (3.54)$$

Sobrepondo-se todos os elementos obtém-se:

$$\Pi_{Rm} = \frac{1}{2} q^T K q - q^T f \quad (3.55)$$

onde q é o vetor dos deslocamentos globais, K é a matriz de rigidez global e f o vetor força global.

Extremizando o funcional em relação a q , obtém-se:

$$K q = f \quad (3.56)$$

que corresponde às equações de elementos finitos, onde as incógnitas, q , são deslocamentos e rotações.

3.4 Deformações supostas

A escolha das deformações supostas é de importância primordial nas formulações mistas. É uma seleção apropriada do campo de deformações supostas que torna a formulação diferente dos métodos "convencionais" de deslocamentos. Entretanto, contrariamente à aproximação dos deslocamentos, as deformações supostas em um modelo misto, isto é, as componentes da matriz P e o vetor β , eq. 3.32, não são obtidas diretamente. As deformações supostas são obtidas a partir de certas premissas adotadas. Entretanto, estas não são únicas nem absolutas. A escolha das deformações supostas determina o comportamento do elemento. Por exemplo, por um lado uma forma excessivamente simples das deformações supostas pode causar modos de deformação cinemática (modos espúrios de deformação). Por outro lado, quando um elemento misto tiver um número "suficientemente" grande de parâmetros de deformação pode apresentar resultados idênticos a um elemento de deslocamentos de mesma base, ficando portanto sujeito a problemas de travamento (locking) para placas e cascas finas.

O comportamento sensível dos métodos mistos foi mostrado por Stolarski e Belytschko (1985). Em particular para obter um elemento finito estável e consis-

tente, certas condições de "compatibilidade" para o campo de deformações supostas independentemente, no espaço das funções teste devem ser satisfeitas. Estas são as condições de Babuska-Brezzi, BB [Carey e Oden (1983)]. Na prática é geralmente difícil tratar as condições de Babuska-Brezzi globalmente [Saleeb et al. (1987)]. Consequentemente, somente requisitos reduzidos como as condições LBB locais (a nível de elemento) são geralmente usadas [Xue e Atluri (1985)]. Como tal elas simplesmente se manifestam na forma de condições necessárias de posto, que é sinônimo da supressão de modos de deformação cinemática. Entretanto é ressaltado que a satisfação das condições LBB não é suficiente para garantir a convergência da solução de um modelo misto [Carey e Oden (1983)].

Conclui-se que uma escolha criteriosa do campo de deformações supostas é fundamental para o sucesso do elemento. Para se determinar o campo de deformações supostas, a essência do procedimento usado por Chang et al. (1989) foi baseado em:

- .(1) membrana e flexão são interpolados separadamente em coordenadas locais.
- .(2) As deformações são funções polinomiais completas em termos lineares em ξ e η , de tal modo que a convergência é garantida numa ordem linear.
- .(3) O número de parâmetros de deformação é mantido mínimo.

Baseados nas suposições acima, Chang et al.(1989) obtém as deformações supostas, e , interpoladas das deformações generalizadas β do seguinte modo:

$$e = \begin{bmatrix} P_m & 0 & P_b \\ 0 & P_s & 0 \end{bmatrix} \beta \quad (3.57)$$

onde

$$P_m = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \eta^2 & \xi\eta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$P_b = t P_m \quad (3.59)$$

$$P_s = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta^2 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

3.5 Deformações supostas para um elemento distorcido

No item anterior, 3.4, definiu-se as componentes de interpolação para as deformações supostas. No procedimento usado considerou-se que o sistema de coordenadas natural é ortogonal. A extensão das mesmas funções de deformações supostas para um elemento distorcido acarreta alguns problemas.

Em primeiro lugar é necessário proceder a escolha de um sistema local de integração de modo único, que seja o mais adequado possível. Deve-se salientar que elementos mistos de placa/casca modificam o seu comportamento conforme a sistemática usada para definir o sistema local de integração. Este tipo de problema não aparece em formulações baseadas em deslocamentos. Em função disso, para elementos mistos, pode-se obter resultados diversos dependendo somente do sistema local usado. Esta característica deve-se ao fato do campo de deformações supostas normalmente não ser simétrico em relação a ξ e η , o que leva a que a matriz de rigidez, em geral, não seja invariante quando de uma transformação de coordenadas.

A sistemática usada no presente trabalho para definir o sistema local, garante a invariância da matriz de rigidez. Para definir o sistema local de integração, a sistemática adotada é a seguinte:

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{x}_{,r} / \|\mathbf{x}_{,r}\| \quad (3.61)$$

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{x}_{,s} / \|\mathbf{x}_{,s}\| \quad (3.62)$$

$$\mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_s) / \|\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_s\| \quad (3.63)$$

$$\mathbf{e}_a = (\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_s) / \|\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_s\| \quad (3.64)$$

$$\mathbf{e}_b = (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_a) / \|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_a\| \quad (3.65)$$

$$\mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b) / \|\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b\| \quad (3.66)$$

$$\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_a + \mathbf{e}_b) / \|\mathbf{e}_a + \mathbf{e}_b\| \quad (3.67)$$

onde as vírgulas indicam diferenciação em relação a coordenada dada pelo índice posterior, \mathbf{x} representa um produto vetorial entre dois vetores \mathbf{e} , $r=\xi$ e $s=\eta$. O sistema local de integração é definido pelos vetores base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Em segundo lugar, a distorção de um elemento misto de casca implica que este último não consegue representar exatamente um campo de deformações constantes. Convém ressaltar, que o termo "exatamente" é aqui usado no sentido de se obter um valor numérico que aproxima o valor analítico com um número de casas decimais igual ao que o computador utiliza para representar um número. Em função disso, é conveniente levar em consideração a distorção do elemento para as deformações supostas de um elemento misto.

Chang et al.(1989) propõem uma transformação jacobiana entre o sistema natural e o sistema local. Esta transformação seria calculada no centróide do elemento de modo a não alterar a ordem dos polinômios, o que poderia provocar o aparecimento de modos espúrios de deformação e/ou aumentar o número de restrições existentes fazendo com que possam surgir problemas de travamento.

Recentemente, Yeom e Lee (1991) propõem para um elemento misto baseado em deformações, que a parcela de deformações supostas seja calculada para o sistema local em $\xi = \eta = \zeta = 0$. Então, através de uma transformação de deformações obtém-se as deformações para cada ponto de integração em seu sistema de coordenadas local. O procedimento proposto por Yeom e Lee (1991) permite, segundo o próprio autor, que o elemento represente um estado de deformações constante exatamente. Entretanto esta abordagem pode criar problemas de travamento para malhas grosseiras e distorcidas, uma vez que existe a possibilidade de se alterar a ordem dos polinômios. Nos exemplos apresentados nesse trabalho não foi constatada essa possibilidade. Deve-se ressaltar que uma extensão para materiais compostos multilaminados não é imediata, uma vez que a transformação de coordenadas proposta não é plana.

O procedimento proposto por Chang et al. (1989), calcular uma transformação jacobiana no centróide do elemento, implica na aproximação de se tratar a distorção do elemento pela distorção ocorrida no centróide. Este fato pode provocar, para malhas grosseiras e distorcidas uma diminuição da precisão obtida. Por exemplo, para malhas distorcidas e grosseiras, o elemento não consegue representar exatamente um estado de deformações constante. A grande vantagem desta abordagem é que devido a ser calculada no centróide do elemento, em princípio, não traz eventuais problemas de travamento para malhas grosseiras e distorcidas. Entretanto convém salientar que Chang et al.(1989) são extremamente superficiais no tipo de transformação jacobiana usada, limitando-se a descrevê-la como sendo obtida através da seguinte transformação:

$$J = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} \right)^{-1} \quad (3.68)$$

onde \mathbf{x}_i , $i = 1,2$ são as coordenadas locais e \mathbf{r}_1 , $\mathbf{r}_1 = \xi$ e $\mathbf{r}_2 = \eta$ as coordenadas

naturais. Também, o único exemplo numérico que aborda o efeito desta transformação é incompleto, as condições de contorno do problema não são apresentadas, e por se tratar de um padrão de malha muito particular, placa rômica a 60°, não permite que se façam generalizações.

Neste trabalho optou-se por usar uma transformação covariante calculada no centróide do elemento. Embora este procedimento não permita fazer com que uma malha distorcida represente exatamente um estado de deformações constante, devido a aproximação comentada acima. Este "defeito" não é considerado de muita importância prática, visto que, normalmente, o estado de tensões é bem mais complexo e a sua representação exata, usando-se uma malha distorcida, já estaria comprometida a priori. Por outro lado, esta opção permite esperar melhores resultados para problemas onde a possibilidade de travamento exista e forem usadas malhas grosseiras. Convém ressaltar, que o procedimento aqui usado parece ser bastante semelhante ao proposto por Chang et al.(1989).

As deformações supostas em um sistema natural distorcido são representadas pelas deformações covariantes, em função disso para se obter as deformações no sistema local a partir das deformações covariantes procedeu-se do seguinte modo. O tensor deformação $\underline{\varepsilon}$ pode ser definido em um ponto em termos de uma base qualquer

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{mn} g^m g^n = \varepsilon^{ij} e_i e_j \quad (3.69)$$

onde

ε_{mn} - Componentes covariantes do tensor deformação

g^m - Vetor base recíproco

ε^{ij} - Componentes contravariantes do tensor deformação

e_i - Vetor de base

As deformações serão obtidas em relação a um sistema cartesiano, no caso o sistema global, portanto:

$$e_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad e_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad e \quad e_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.70)$$

Em um sistema curvilíneo, os vetores de base contravariantes, g^m , podem ser facilmente obtidos a partir dos vetores base covariantes g_i [Coffer e Will (1991)].

Os vetores base covariantes são obtidos por

$$g_i = \frac{\partial x}{\partial r^i} \quad (3.71)$$

onde $r^1 = \xi$, $r^2 = \eta$ e $r^3 = \zeta$.

Para se obter os vetores de base contravariantes constroi-se uma matriz G , na qual os vetores de base covariantes, g_i , são dispostos por colunas como esquematizado abaixo.

$$\begin{bmatrix} G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Da inversa da matriz, G^{-1} , obtem-se os vetores contravariantes. Estes estão dispostos por linhas como esquematizado abaixo.

$$\begin{bmatrix} g^1 \\ g^2 \\ g^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.73)$$

A equação 3.69 pode ser reescrita considerando-se a simetria do tensor deformação (ϵ^{ij}). Neste caso, as deformações são escritas como um vetor (e^i). A transformação das deformações supostas do sistema natural para o sistema global pode ser definida como:

$$e^i = T e_m \quad (3.74)$$

onde e^i são as componentes cartesianas de deformação, e_m são as componentes covariantes de deformação em um sistema curvilíneo e T é a matriz de transformação de coordenadas. A matriz de transformação de coordenadas T é apresentada no apêndice C.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

4.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados resultados numéricos, para materiais isotrópicos e para materiais compostos multilaminados, obtidos com o elemento finito descrito anteriormente. O elemento foi implementado no programa Dieixo [Barcellos e Mendonça (1989)].

Em todos os casos analisados as grandezas empregadas, como dimensões, forças, pressões e outras são expressas em um sistema de unidades coerente.

4.2 Problemas com materiais isotrópicos

São apresentados uma série de problemas teste (benchmark test) para materiais isotrópicos. Pretende-se analisar o comportamento do elemento nos diversos testes bem como detectar eventuais características do elemento.

4.2.1 "Patch test"

Neste problema um elemento deve-se mostrar capaz de representar corretamente um estado de deformações constante. Com este teste pode-se também avaliar a sensibilidade do elemento à distorção de malha.

Uma placa quadrada foi discretizada usando-se quatro elementos regulares, quatro elementos linearmente distorcidos e quatro elementos distorcidos de lados curvos, fig. 4.1 (a), (b) e (c) respectivamente. A placa foi sujeita a um estado de flexão constante. São analisadas duas razões de lado sobre espessura , L/h . O estado de deformações constante foi obtido engastando-se a placa em um lado e aplicando-se um momento constante ao longo do lado oposto. Como observado na seção 3.5, não se espera que os resultados devidos às malhas distorcidas representem estados de tensões exatamente idênticos à solução analítica. Para a malha regular, o resultado obtido foi exatamente idêntico à solução analítica.

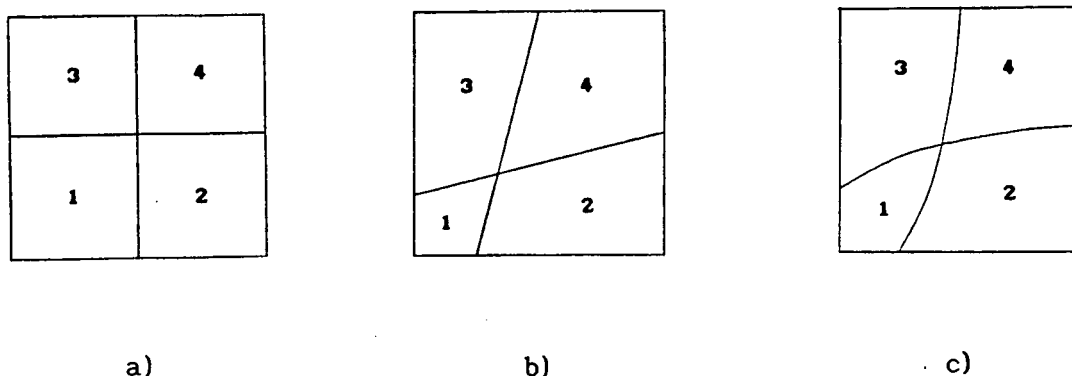


Fig 4.1 Malhas usadas para o problema de patch test

Na tabela 4.1 são apresentados os resultados adimensionalizados dos deslocamentos, w , do nó central do lado onde é aplicado o momento e, os momentos fletores calculados, para cada um dos quatro elementos, no centróide. A solução analítica $w = ML^2/2EI$ foi usada para adimensionalizar os deslocamentos, enquanto que os momentos são adimensionalizados em relação ao momento aplicado M . Os resultados são apresentados para as malhas (b) e (c). Para a malha (a) não são apresentados resultados, uma vez que estes são exatamente idênticos à solução analítica.

Tab. 4.1 Patch test - Momentos no centróide dos elementos e deslocamento na extremidade

	L/h	w	Momento fletor			
			1	2	3	4
malha (b)	1	1,000	0,998	0,998	0,997	0,998
	10^3	1,000	0,998	0,998	0,997	0,998
malha (c)	1	1,000	0,991	0,996	0,997	1,000
	10^3	0,982	0,998	0,918	0,988	0,994

Como se pode verificar pelos resultados, embora a solução obtida, para a malha distorcida de lados retos (b), não seja exata, é muito boa. Para malhas distorcidas de lados curvos (c) ocorrem desvios apreciáveis, principalmente no casos de placa fina. Estes desvios são comuns a qualquer elemento de casca lagrangeano degenerado.

Verifica-se portanto que o estado de deformações constante é exatamente representado para malhas regulares, mas somente aproximadamente para malhas distorcidas. Entretanto, neste caso, a solução converge à medida em que a malha é refinada.

4.2.2 Placa engastada ou simplesmente apoiada

Neste problema analisa-se o comportamento de uma placa sujeita a um carregamento uniformemente distribuído, variando-se a relação L/h (lado sobre espessura) para dois tipos de condições de contorno; apoio ou engaste. Para placa apoiada, w e θ_n foram restritos ao longo do contorno. Para placa engastada, w , θ_n e θ_t foram restritos no contorno.

Devido à simetria do problema somente é necessário modelar 1/4 da placa. Para discretizar o domínio utilizou-se malhas de 2×2 , 3×3 e 4×4 elementos. Para cada uma dessas discretizações usou-se uma malha regular e uma malha distorcida. Estas últimas são apresentadas na fig. 4.2. Os resultados apresentados foram adimensionais em relação à solução da teoria clássica de placas, Timoshenko e Krieger (1959). Para a adimensionalização dos deslocamentos foi usado o valor de $w = 0,00406qa^4/D$ para placa apoiada e $w = 0,00126qa^4/D$ para placa engastada sendo q o carregamento, a a dimensão do lado da placa, D a rigidez de flexão e w o deslocamento transversal no centro da placa.

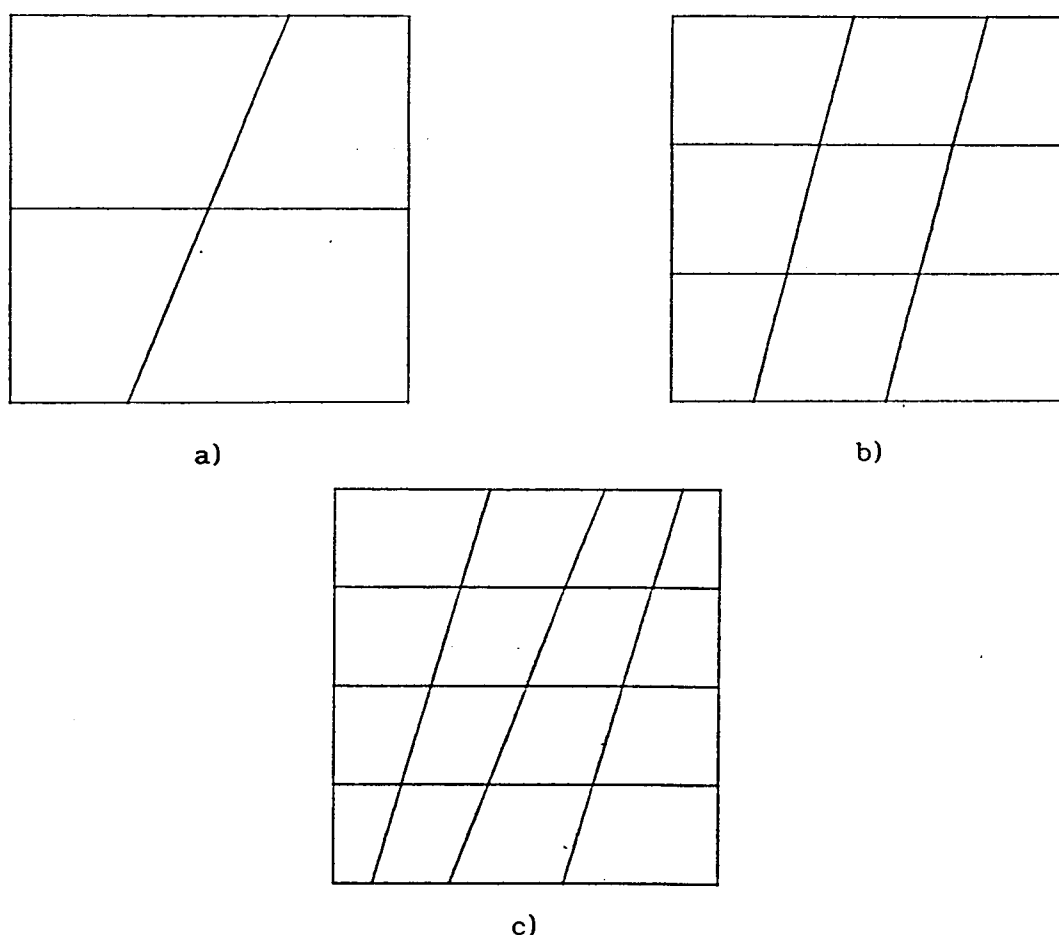


Fig. 4.2 Malhas distorcidas para os problemas de placa

Na tabela 4.2 são apresentados resultados dos deslocamentos máximos para uma placa simplesmente apoiada sujeita a carregamento uniformemente distribuído para malhas regulares 2x2, 3x3 e 4x4. Na tabela 4.3 são apresentados os resultados obtidos com malhas distorcidas para o mesmo problema.

Tabela 4.2 Deslocamentos adimensionalizados de uma placa apoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído para uma malha regular

L / h	2 x 2	3 x 3	4 x 4
10^2	1,0028	1,0014	1,0012
10^3	1,0023	1,0009	1,0007
10^4	1,0023	1,0009	1,0007
10^5	1,0023	1,0009	1,0007

Tabela 4.3 Deslocamentos adimensionalizados de uma placa apoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído para uma malha distorcida

L / h	2 x 2	3 x 3	4 x 4
10^2	1,0027	1,0013	1,0010
10^3	1,0029	1,0008	1,0002
10^4	1,0035	1,0012	0,9999
10^5	1,0035	1,0012	0,9999

Na tabela 4.4 são apresentados deslocamentos máximos para uma placa engastada sujeita a carregamento uniformemente distribuído, para malhas regulares 2x2, 3x3 e 4x4. Na tabela 4.5 são apresentados os deslocamentos obtidos com uma malha distorcida, para uma placa engastada.

Tabela 4.4 Deslocamentos adimensionalizados de uma placa engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído para uma malha regular

L / h	2 x 2	3 x 3	4 x 4
10^2	1,0158	1,0080	1,0068
10^3	1,0137	1,0060	1,0048
10^4	1,0137	1,0060	1,0048
10^5	1,0137	1,0060	1,0048

Tabela 4.5 Deslocamentos adimensionalizados de uma placa engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído para uma malha distorcida

L / h	2 x 2	3 x 3	4 x 4
10^2	1,0161	1,0064	1,0043
10^3	1,0191	0,9993	0,9966
10^4	1,0241	0,9965	0,9927
10^5	1,0242	0,9964	0,9926

Dos resultados apresentados nas tabelas 4.2-5 verifica-se que o elemento apresenta ótimos resultados de deslocamentos para análise de placas.

Para placas apoiadas o elemento mostra-se insensível a variação de L/h tanto para malhas regulares como para malhas distorcidas. O desvio máximo do deslocamento obtido com malha distorcida em relação à malha regular é de aproximadamente 0,12%, para a malha de 2x2 elementos e uma razão $L/h = 10^5$. Deve-se salientar que valores de L/h superiores a 10^3 estão além de uma aplicação prática. Para este caso o desvio máximo é de aproximadamente 0,06%.

Para placas engastadas o resultado para malha regular está um pouco mais distante da solução analítica. Entretanto, visto este problema conter um maior número de restrições, ao refinar a malha o resultado se aproxima da solução de referência. O desvio máximo do resultado obtido com malha distorcida em relação à malha regular é aproximadamente de 1,23%, para $L/h = 10^5$. Já para $L/h = 10^3$ tem-se um desvio de 0,82%. Note-se que à medida em que a placa vai-se tornando mais fina este desvio aumenta.

Da análise dos resultados deste problema conclui-se que o elemento não apresenta problemas de travamento (locking), ou seja, não se torna excessivamente rígido à medida que a placa vai-se tornando fina. Isto evidencia a correta seleção da interpolação das deformações generalizadas usada para representar as deformações supostas. A comparação entre as malhas distorcidas e as malhas regulares, pelos baixos valores de desvio obtidos, demonstra o sucesso da transformação covariante usada para as deformações supostas.

São apresentados na tabela 4.6 os resultados adimensionalizados de momentos máximos para ambos os modelos, apoio e engaste, usando-se uma malha regular de 4×4 elementos. Os momentos foram calculados no nó central da placa. Os resultados foram adimensionalizados em relação à solução analítica de placa fina, Timoshenko e Krieger (1959). Esta solução prevê $M = 0,0479qa^2$ e $M = 0,0231qa^2$ para placa apoiada e engastada, respectivamente. De novo os resultados são bons.

Tabela 4.6 Momentos no centro da placa obtidos com uma malha 4×4 regular para placa apoiada e placa engastada

L / h	Placa apoiada	Placa engastada
10^2	1,0056	1,0111
10^3	1,0056	1,0113
10^4	1,0056	1,0114
10^5	1,0056	1,0114

4.2.3 Teto de Scordellis-Lo

No teto de Scordellis-Lo uma seção cilíndrica é carregada pelo peso próprio e suportada nas extremidades por um diafragma rígido. Os esforços de membrana dominam este tipo de problema. É um teste onde se verifica a capacidade do elemento em representar estados complexos de esforços de membrana, embora neste teste não ocorra flexão inextensional. As propriedades do material são $E = 4,32 \times 10^8$ e $\nu = 0$; o peso próprio por unidade de área da casca é de 90 unidades e a espessura é $t = 0,25$.

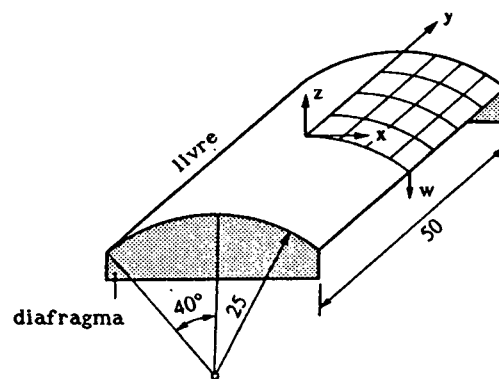


Fig 4.3 Teto de Scordellis-Lo

Os resultados numéricos do deslocamento vertical w no meio do lado do teto são apresentados na tabela 4.7 e normalizados em relação a $w_{ref} = 0.3024$ [White e Abel (1989)]. Os resultados obtidos são bons. Note-se que mesmo o resultado para uma malha de 2×2 elementos já é muito bom.

Tabela 4.7 Teto de Scordellis. Deslocamento w

Malha	w	w / w_{ref}
1 x 1	0,327348	1,0825
2 x 2	0,304262	1,0062
3 x 3	0,304017	1,0053
4 x 4	0,303745	1,0044
5 x 5	0,303615	1,0040
6 x 6	0,303571	1,0039

4.3.4 Casca esférica puncionada

Uma casca esférica com duas cargas puncionando e duas cargas tracionando, espaçadas alternadamente de 90° ao longo da linha de equador, é modelada em um quadrante usando-se condições de simetria. Este é um teste muito bom para se verificar o comportamento do elemento à flexão inextensional e um exemplo excelente para modelar movimentos de corpo rígido. Foi introduzida uma abertura no topo, paralela a um meridiano a 18° conforme mostrado na figura 4.4. A espessura da casca é $t = 0,04$ e o raio da casca $R = 10$; as propriedades do material são $E = 6,825 \times 10^7$ e $\nu = 0,3$. O valor $u_{ref} = 0,093$ [Macneal e Harder (1985)] é usado para normalizar a deflexão no ponto A. Os resultados são apresentados na tabela 4.8.

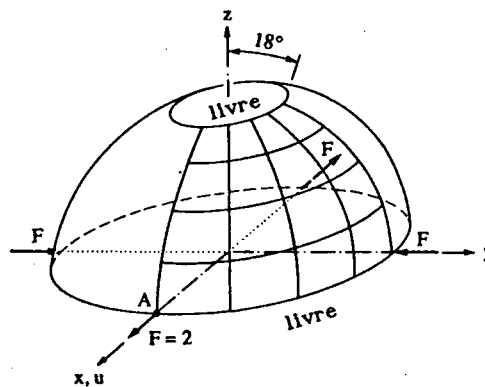


Fig 4.4 Casca esférica com abertura a 18°

Tabela 4.8 Casca esférica. Deslocamento no ponto A

Malha	$u \text{ (} \times 10^2 \text{)}$	u / u_{ref}
2 x 2	3,9552	0,4253
3 x 3	7,4390	0,7999
4 x 4	8,7223	0,9379
5 x 5	9,0827	0,9766
6 x 6	9,2240	0,9918
8 x 8	9,3229	1,0025

O elemento apresentou resultados sofríveis para uma malha grosseira (2x2). Entretanto, ao se refinar a malha os resultados mostraram-se excelentes.

4.2.5 Cilindro puncionado

Um cilindro puncionado na sua seção média por duas forças opostas é analisado para dois tipos de condições de contorno nas extremidades; diafragma rígido e livre.

4.2.5.1 Cilindro puncionado restrito com um diafragma nas extremidades

Considere um cilindro puncionado, na sua seção média, por duas forças verticais e cujas extremidades estão ligadas a um diafragma rígido, fig. 4.5. Levando-se em consideração as condições de simetria, o modelo usado representa um octante do cilindro. A espessura do cilindro é $t = 3$ e as propriedades do material são $E = 3,0 \times 10^6$ e $\nu = 0,3$. Os resultados numéricos são apresentados na tab. 4.9 e normalizados em relação ao valor $w_{ref} = 1,82488 \times 10^{-5}$ [White e Abel (1989)].

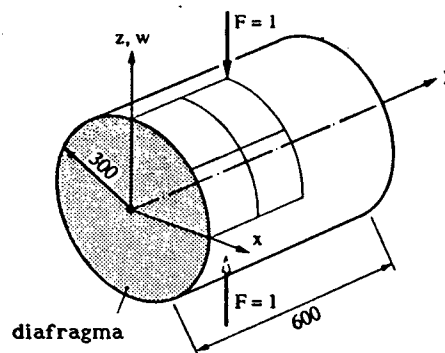


Fig. 4.5 Cilindro puncionado restrito com um diafragma nas extremidades

Tabela 4.9 Cilindro com um diafragma nas extremidades

Malha	$w (x 10^5)$	w / w_{ref}
2 x 2	-1,23596	0,6773
3 x 3	-1,70641	0,9351
4 x 4	-1,76295	0,9661
5 x 5	-1,77699	0,9738
6 x 6	-1,79178	0,9819
8 x 8	-1,81505	0,9946
10 x 10	-1,82791	1,0017

Convém ressaltar que este é um dos problemas teste mais crítico para um elemento finito de casca. Devem ser representados corretamente uma flexão inextensional e um estado complexo de tensão de membrana. O elemento mostra uma convergência muito boa, inclusive para malhas grosseiras.

4.2.5.2 Efeitos da distorção da malha

Para o problema do item anterior, cilindro puncionado com um diafragma nas extremidades, é analisado o efeito da distorção da malha. Para tal usou-se uma malha com 6×6 elementos, sendo que os quatro elementos centrais são distorcidos de α graus em relação a geratriz do cilindro, fig. 4.6. Os resultados são apresentados na tabela 4.10 e são normalizados em relação ao deslocamento w_0 obtido para um ângulo $\alpha = 0^\circ$. Observa-se, como esperado, que o erro aumenta com a distorção da malha. Apesar disso, os resultados obtidos demonstram que o elemento não apresenta uma sensibilidade excessiva à distorção.

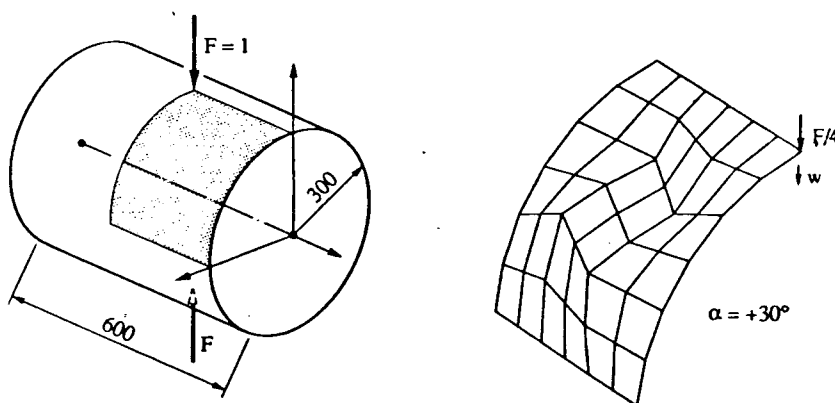


Fig. 4.6 Cilindro com malha distorcida

Tab. 4.10 Cilindro puncionado com diafragma nas extremidades
Malha distorcida

Ângulo	$w (x 10^5)$	w / w_0
0°	-1,79178	1,0000
10°	-1,76397	0,9845
20°	-1,73704	0,9694
30°	-1,71276	0,9559
40°	-1,68619	0,9411

4.2.5.3 Cilindro com extremidades livres

Este problema apresenta uma geometria idêntica ao anterior, exceto pelas condições de contorno empregadas. Neste caso as extremidades do cilindro estão livres. Os dados geométricos da casca são $R = 4,953$, $L = 10,35$ e a espessura $t = 0,094$. A solução de referência usada é devida a Cantin (1970) que apresenta $w_{ref} = 0,1139$. Uma vez que a casca é fina, $R/h = 52,69$, grande parte da mesma sofre movimento de corpo rígido. Devido às condições de contorno, elementos que apresentam modos espúrios não conseguem representar este modelo.

Tabela 4.11 Cilindro de extremidades livres

Malha	$w \times 10^1$	w / w_{ref}
2 x 2	-0,56424	0,4954
3 x 3	-0,77340	0,6790
4 x 4	-0,96431	0,8466
5 x 5	-1,05474	0,9260
6 x 6	-1,06497	0,9613
8 x 8	-1,12382	0,9942
10 x 10	-1,13239	0,9970

Pelos resultados apresentados na tab. 4.11 verifica-se que eles convergem para a solução exata, embora a malha computacional necessite um refino apreciável. Conclui-se também que o elemento não apresenta problemas de travamento de membrana (locking de membrana), visto que ele representa corretamente uma flexão sem sofrer extensão. O refino que é necessário usar pode parecer demasiadamente grande, mas deve-se à necessidade de se aproximar corretamente a geometria cilíndrica de modo a permitir uma flexão inextensível. Esta característica é comum a elementos quadráticos que usem integração cheia. Estes elementos apresentam um forte acoplamento membrana-flexão em oposição a elementos que usem integração reduzida e que praticamente não apresentam acoplamento membrana-flexão, comportando-se como se fossem elementos planos. Stolarsky e Belytschko (1983) provaram esta característica para vigas curvas C^0 . Para cascas cilíndricas um comportamento semelhante é previsível.

4.3 Problemas com materiais laminados

São apresentados vários problemas para materiais compostos multilaminados propostos na literatura.

4.3.1 Placa retangular homogênea anisotrópica engastada sujeita a carregamento uniforme

O problema analisado aqui consiste em uma placa retangular com os quatro lados engastados, sujeita a um carregamento uniformemente distribuído de intensidade q_0 . A razão entre os lados é igual a dois. A placa é constituída de uma única lâmina, cuja orientação em relação ao eixo x é variada entre 0° e 90° . Este problema foi inicialmente proposto por Lakshminarayana e Murthy (1984) e os resultados apresentados, obtidos com o elemento TRIPLT, têm sido usados como referência uma vez que não existe solução analítica. Convém Lembrar que o elemento TRIPLT possui três nós e quinze graus de liberdade por nó. Este problema é considerado um teste difícil para um elemento devido à razão de aspecto da placa, às condições de contorno e ao material altamente anisotrópico. As propriedades do material usado são: $E_1 = 30,0 \times 10^6$, $E_2 = 0,75 \times 10^6$, $G_{12} = 0,45 \times 10^6$, $G_{23} = 0,375 \times 10^6$ e $\nu_{12} = \nu_{23} = 0,25$.

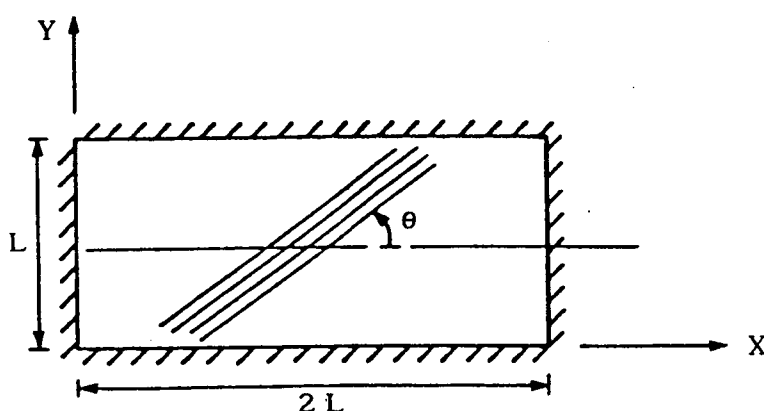


Fig 4.7 Placa retangular engastada

Devido à anisotropia do material o domínio foi todo modelado. Foram usadas malhas de 8×8 e 10×10 elementos para calcular o deslocamento transversal no centro da placa.

Os resultados são apresentados na tabela 4.12 para uma placa fina ($L/h = 100$) e na tabela 4.13 para uma placa espessa ($L/h = 10$). Para uma placa fina, os resultados obtidos por Wilt et al.(1990), usando uma malha de 10×10 elementos, são apresentados para comparação. Os resultados apresentados por Lakshminarayana e Murthy (1984) foram obtidos com uma malha de 8×8 elementos. Os deslocamentos transversais no centro da placa são normalizados em relação a \bar{w} , onde

$$\bar{w} = w \frac{E_2 h^3}{q_0 L^4} \times 10^2 \quad (4.1)$$

Tab. 4.12 Efeito da orientação das fibras no deslocamento transversal no centro de uma placa retangular engastada sujeita a um carregamento uniforme ($L/h = 100$)

Orientação das fibras	$\bar{w} \times 10^4$			
	8x8	10x10	Wilt	TRIPLT
0°	10,6598	10,6563	10,8879	10,5375
15°	9,8907	9,8858	10,0215	9,4455
30°	6,4782	6,4769	6,5132	6,0859
45°	2,8969	2,8980	2,9226	2,8985
60°	1,3847	1,3854	1,3820	1,4139
75°	0,9177	0,9175	0,9133	0,9134
90°	0,8051	0,8049	0,8073	0,8017

Os resultados obtidos mostram uma convergência boa. Para uma placa fina nota-se que o desvio da solução obtida em relação ao elemento TRIPLT é máximo para um ângulo de 30°. Este desvio é de aproximadamente 6,5%. Para placa semi-espessa para o mesmo ângulo o elemento apresenta um menor desvio máximo, 1,6%. Não deixa de ser curioso ressaltar que o ângulo em torno de 30° corresponde ao pico máximo do momento torçor M_{xy} [Lakshminarayana e Murthy (1984)]. Nota-se, portanto, que pode existir uma relação entre os dois fatos. Estudos adicionais seriam necessários para se comprovar tal relação.

Tab. 4.13 Efeito da orientação das fibras no deslocamento transversal no centro de uma placa retangular engastada sujeita a um carregamento uniforme ($L/h = 10$)

Orientação das fibras	$\bar{w} \times 10^4$		
	6x6	8x8	TRIPLT
0°	16,2311	16,2272	16,0507
15°	15,0676	15,0643	14,8537
30°	11,1751	11,1749	11,0010
45°	6,9023	6,9045	6,8400
60°	4,5342	4,5367	4,5215
75°	3,4540	3,5458	3,5430
90°	3,2785	3,2798	3,2798

4.3.2 Placa laminada "angle ply" apoiada

Uma placa retangular formada por duas lâminas orientadas a \pm teta graus, laminado "angle ply", e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído é analisada neste problema. Note-se que devido ao laminado provocar acoplamento membrana/flexão, não se podem fazer hipóteses de simetria, sendo a placa modelada em todo o seu domínio. Os resultados obtidos serão comparados com uma solução por séries apresentada por Spilker e Jakobs (1986). Na obtenção dos resultados, Spilker e Jakobs (1986) usaram 20 termos não nulos para a expansão da solução. As propriedades das lâminas usadas neste problema são: $E_1 = 40 \times 10^6$, $E_2 = 10^6$, $G_{12} = G_{23} = 0,5 \times 10^6$ e $\nu_{12} = \nu_{23} = 0,25$. A espessura total do laminado para todos os exemplos é de $h = 0,02$.

Na tabela 4.14 são apresentados os resultados de um laminado $[-15/15]$ para uma placa simplesmente apoiada de lado $L = 10$, ($L/h = 500$). Este laminado foi selecionado em virtude dos momentos no centro da placa, M_x e M_y , diferirem aproximadamente de uma ordem de magnitude, assim como os deslocamentos no meio dos lados no plano da placa. São apresentados resultados para w , M_x e M_y , respectivamente deslocamento transversal, momento fletor em x e em y , obtidos no centro da placa e os deslocamentos no plano da placa u e v obtidos no meio dos lados da placa.

Os resultados obtidos na tabela 4.14 mostram uma convergência muito boa e rápida. Para uma malha de 4x4 elementos o desvio em relação à solução exata é menor que 2%, enquanto que para uma malha de 8x8 elementos o desvio é desprezível.

Tab. 4.14 Convergência de uma placa "angle ply" ($\theta = 15^\circ$) apoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído

		Malha (Placa inteira)			
		2x2	4x4	6x6	8x8
u (L/2,0)	obtido	0,007388	0,007732	0,007716	0,007712
u _{ref} =0,00771	ob./ref	0,9582	1,0029	1,0007	1,0002
v (0,L/2)	obtido	0,033155	0,032754	0,032794	0,032803
v _{ref} =0,03281	ob./ref	1,0105	0,9983	0,9995	0,9998
w (L/2,L/2)	obtido	9,28274	8,93551	8,92935	8,92868
w _{ref} =8,927	ob./ref	1,0398	1,0010	1,0003	1,0002
Mx (L/2,L/2)	obtido	12,3280	11,4796	11,4499	11,4408
Mx _{ref} =11,42	ob./ref	1,0795	1,0052	1,0026	1,0018
My (L/2,L/2)	obtido	1,48062	1,21130	1,21974	1,22527
My _{ref} =1,234	ob./ref	1,1999	0,9816	0,9884	0,9929

Uma mesma placa quadrada "angle ply" apoiada de lado $L = 20$ ($L/h = 10^3$) é analisada. O mesmo material é usado. O efeito da variação do ângulo ($\pm \theta$) é analisado entre 5° e 45° . Para tal usou-se uma malha de 6x6 elementos para modelar a placa inteira. Os deslocamentos transversais no centro da placa são normalizados em relação a \bar{w} , onde

$$\bar{w} = w \frac{E_2 h^3}{q_0 L^4} \times 10^2 \quad (4.2)$$

Na tabela 4.15 são apresentados os resultados obtidos. Como se pode verificar os resultados obtidos são muito bons para todas as orientações.

Tab. 4.15 Efeito da orientação das fibras no deslocamento transversal de um placa fina "angle ply" apoiada e sujeita a um carregamento uniforme

orientação da fibra	\bar{w}	\bar{w}_{ref}	\bar{w}/\bar{w}_{ref}
$\pm 5^\circ$	0,4735	0,4736	0,9997
$\pm 15^\circ$	0,7143	0,7142	1,0001
$\pm 25^\circ$	0,7872	0,7870	1,0003
$\pm 30^\circ$	0,7562	0,7561	1,0001
$\pm 45^\circ$	0,7323	0,7322	1,0002

4.3.3 Placa quadrada 0/90/90/0 apoiada

Uma placa quadrada com um laminado 0/90/90/0 apoiada e sujeita a um carregamento senoidal é analisada. Note-se que uma vez que o problema é simétrico somente um quarto da placa necessita ser modelado. O carregamento senoidal é descrito por:

$$q(x,y) = q_0 \sin \frac{n \pi}{L} x \sin \frac{n \pi}{L} y \quad (4.3)$$

sendo L a dimensão do lado do quadrado e q_0 a intensidade do carregamento. As propriedades do material são $E_1 = 25,0 E_2$, $G_{12} = G_{13} = 0,5 E_2$, $G_{23} = 0,2 E_2$ e $\nu_{12} = 0,25$. Foram analisadas várias razões de L/h (lado sobre espessura) para o problema e são apresentados resultados do deslocamento máximo e tensões para a placa.

Os resultados obtidos, apresentados na tabela 4.16, foram adimensionalizados da seguinte forma:

$$\bar{w} = w \frac{E_2 h^3}{q_0 L^4} \times 10^2 ; \quad w = w(L/2, L/2, 0)$$

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 \left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right) \frac{h^2}{q_0 L^2} ; \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 \left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{4} \right) \frac{h^2}{q_0 L^2}$$

$$\bar{\sigma}_4 = \sigma_4 \left(\frac{L}{2}, 0, 0 \right) \frac{h}{q_0 L} ; \quad \bar{\sigma}_5 = \sigma_5 \left(0, \frac{L}{2}, 0 \right) \frac{h}{q_0 L}$$

$$\bar{\sigma}_6 = \sigma_6 \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) \frac{h^2}{q_0 L^2} \quad (4.4)$$

Tab. 4.16 Placa 0/90/90/0 simplesmente apoiada sujeita
a um carregamento senoidal

L/h	Ref.	\bar{w}	$\bar{\sigma}_1$	$\bar{\sigma}_2$	$\bar{\sigma}_4$	$\bar{\sigma}_5$	$\bar{\sigma}_6$
4	Malha 3x3	17,087	0,414	0,597	0,271	0,256	0,0321
	Malha 6x6	17,095	0,408	0,582	0,278	0,265	0,0311
	FSDT	17,170	0,406	0,577	0,196	0,140	0,0308
	Pagano (1972)	19,536	0,720	0,666	0,292	0,270	0,0467
10	Malha 3x3	6,627	0,511	0,372	0,174	0,304	0,0251
	Malha 6x6	6,627	0,502	0,364	0,179	0,314	0,0244
	FSDT	6,628	0,499	0,362	0,129	0,167	0,0241
	Pagano (1972)	7,434	0,559	0,403	0,196	0,301	0,0276
20	Malha 3x3	4,912	0,540	0,304	0,144	0,319	0,0229
	Malha 6x6	4,911	0,530	0,298	0,149	0,329	0,0223
	FSDT	4,912	0,527	0,296	0,109	0,175	0,0221
	Pagano (1972)	5,172	0,543	0,309	0,156	0,328	0,0230
50	Malha 3x3	4,410	0,549	0,280	0,135	0,324	0,0223
	Malha 6x6	4,409	0,540	0,275	0,139	0,334	0,0216
	FSDT	-	-	-	-	-	-
	Pagano (1972)	4,485	0,539	0,276	0,141	0,337	0,0216
100	Malha 3x3	4,338	0,550	0,277	0,133	0,324	0,0222
	Malha 6x6	4,337	0,541	0,272	0,137	0,335	0,0215
	FSDT	4,337	0,538	0,271	0,101	0,178	0,0213
	Pagano (1972)	4,385	0,539	0,271	0,139	0,339	0,0214

Os resultados foram comparados com uma solução obtida por séries para a teoria de deformação de 1ª ordem apresentada por Reddy (1984b) e com uma solução obtida através das equações da elasticidade apresentada por Pagano e Hatfield (1972). Note-se que o presente elemento é baseado em uma teoria de deformações de 1ª ordem, enquanto que os resultados apresentados por Pagano e Hatfield (1972) foram obtidos através de equações tridimensionais da elasticidade. Para placas espessas, L/h pequeno, não se espera uma concordância entre a teoria usada neste trabalho e os resultados de Pagano e Hatfield. Isto porque uma teoria de 1ª ordem não pode representar os deslocamentos em zig-zag ao longo da espessura da placa como o faz a teoria de Pagano e Hatfield. As discrepâncias observadas para placa espessa eram portanto esperadas. Na análise de placas semi-espessas e finas, L/h médio e grande respectivamente, ve-se que a teoria de 1ª ordem prediz resultados muito semelhantes aos da teoria da elasticidade. Isto se deve ao fato dos deslocamentos ao longo da espessura do plano da placa serem neste caso suficientemente suaves para serem corretamente aproximados por uma reta.

Observando-se as tensões cisalhantes transversais, $\bar{\sigma}_4$ e $\bar{\sigma}_5$, verifica-se que os resultados obtidos, inclusive para placas espessas, se aproximam mais da solução da elasticidade do que os resultados obtidos por séries. Embora este fato pareça estranho, o fato de um elemento baseado numa teoria de 1ª ordem predizer resultados mais precisos do que a teoria, deve-se ao fato que as tensões cisalhantes transversais foram obtidas através das equações de equilíbrio, conforme descrito no item 2.4, procedimento que não foi usado na solução por séries.

Verifica-se, portanto, que o procedimento de cálculo de tensões cisalhantes transversais por equilíbrio é, para materiais semelhantes ao usado neste exemplo, extremamente valioso para a obtenção de uma solução mais próxima da realidade física do problema.

4.3.4 Cilindro engastado sujeito a pressão interna

Um cilindro sob pressão interna e com as extremidades engastadas é analisado. Este problema foi proposto por Hass e Lee (1987) e foi também analisado por Wilt et al.(1990). O problema é resolvido para o deslocamento radial máximo e os resultados são comparados com os dos referidos autores. A geometria e propriedades do material são $E_1 = 7,5 \times 10^6$, $E_2 = 2,0 \times 10^6$, $G_{12} = 1,25 \times 10^6$, $G_{13} = G_{23} = 0,625 \times 10^6$ e $\nu_{12} = 0,25$, a pressão interna é de $q_0 = (6,41/\pi)$, o raio do cilindro $R = 20$ e o comprimento $L = 20$, fig. 4.8.

O cilindro é analisado para três laminados distintos: 0 , $[45/-45]_s$ e $[0/90]_s$. Uma vez que todos os laminados são simétricos somente um octante do cilindro será modelado. Convém ressaltar que em ambos os trabalhos citados só foi apresentada uma análise de convergência, uma vez que não se dispõe de solução analítica para comparações. Neste trabalho são apresentados um estudo de convergência e comparações, com os resultados obtidos pelos referidos autores, quando disponíveis. Os resultados são apresentados para duas razões de R/h (raio sobre espessura)

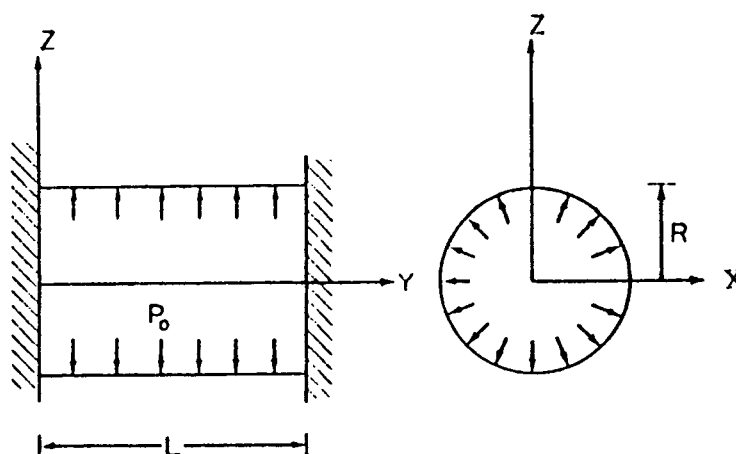


Fig. 4.8 Cilindro engastado sujeito a pressão interna

Os resultados apresentados, tabela 4.17 e 4.18, são comparados com os resultados obtidos por Hass e Lee (1987) que usaram uma malha de 16×16 elementos e com os resultados obtidos por Wilt et al.(1990) que usaram uma malha de 6×6 elementos.

Dos resultados apresentados verifica-se que o laminado $[0/90]_s$ é o mais rígido. Este resultado era esperado visto que a pressão interna causa tensões circunferenciais que são eficientemente suportadas pelas lâminas a 90° . Como esperado o laminado unidirecional a 0° é o mais flexível. A comparação com Hass e Lee (1987) e Wilt et al.(1990) mostra que soluções muito semelhantes foram obtidas.

Tab. 4.17 Deslocamento radial máximo de um cilindro engastado
sujeito a pressão interna ($R/h = 20$)

Laminado	$w \times 10^3$			
	4x4	6x6	Wilt	Hass
0	0,3748	0,3748	0,3758	0,3781
$[45/-45]_s$	0,2396	0,2400	0,2331	0,2402
$[0/90]_s$	0,1782	0,1783	0,1787	0,1783

Tab. 4.18 Deslocamento radial máximo de um cilindro engastado
sujeito a pressão interna ($R/h = 100$)

Laminado	$w \times 10^3$		
	4x4	6x6	Hass
0	2,0444	2,0478	2,044
$[45/-45]_s$	1,0695	1,0694	1,068
$[0/90]_s$	0,8424	0,8435	0,8422

Nas figuras 4.9 e 4.10 são apresentados, respectivamente o deslocamento radial w e o momento fletor meridional M_y ao longo de uma geratriz do cilindro para os três laminados estudados usando-se uma razão $R/h = 20$.

Nas figuras 4.11 e 4.12 o deslocamento radial w e o momento fletor meridional M_y são apresentados para uma razão $R/h = 100$.

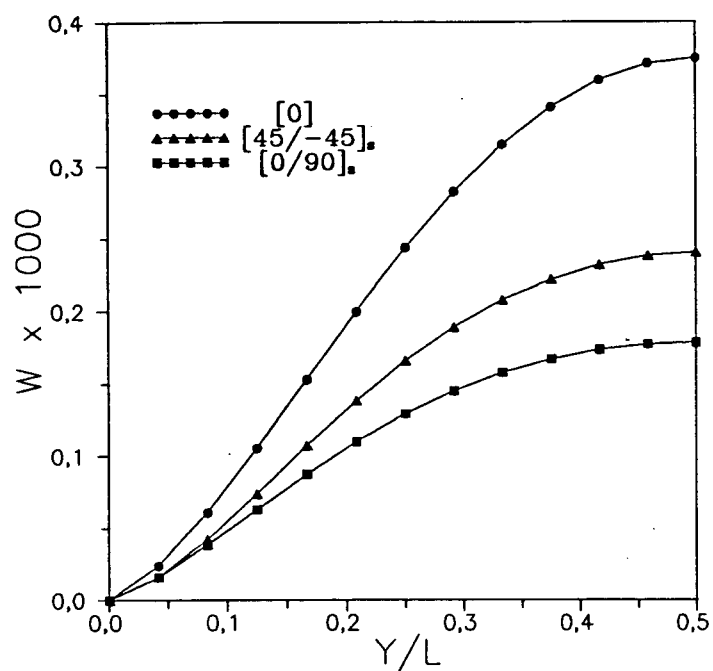


Fig. 4.9 Deslocamento radial w de um cilindro engastado ($R/h = 20$)

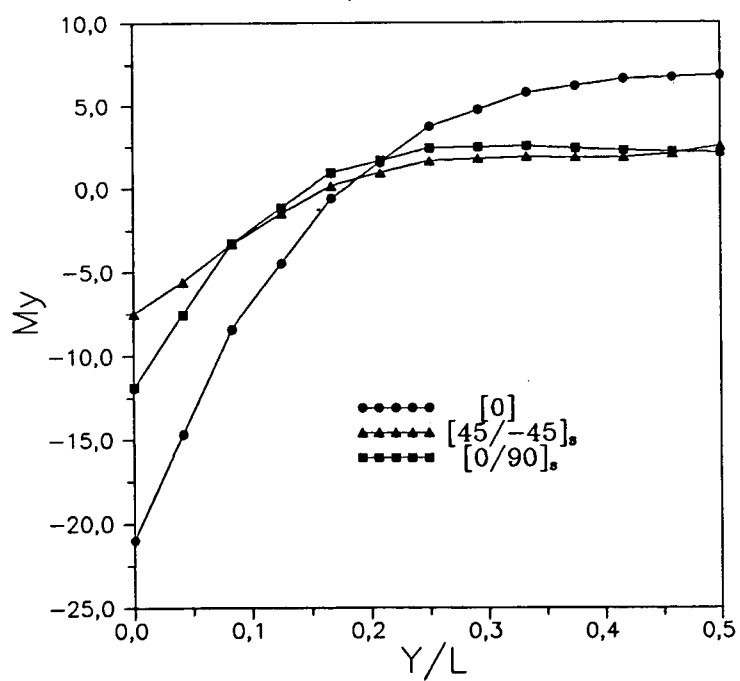


Fig. 4.10 Momento meridional My de um cilindro engastado ($R/h = 20$)

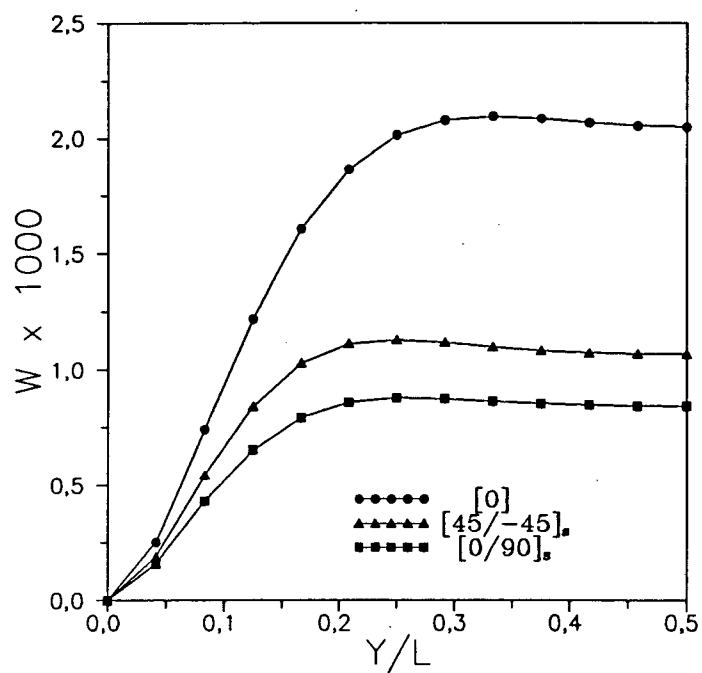


Fig. 4.11 Deslocamento radial w de um cilindro engastado ($R/h = 100$)

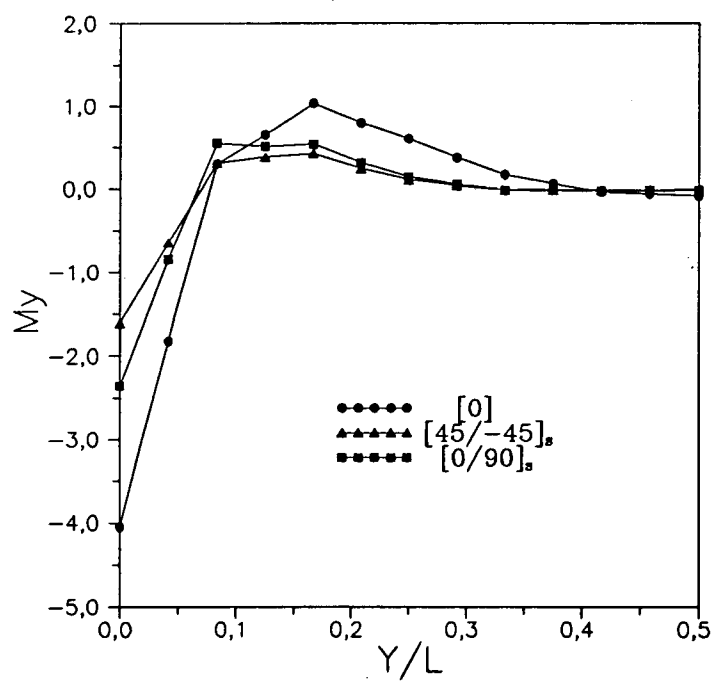


Fig. 4.12 Momento meridional M_y de um cilindro engastado ($R/h = 100$)

4.3.5 Seção cilíndrica de 90° engastada sujeita a pressão interna

Uma seção cilíndrica de 90° engastada e sujeita a pressão interna é estudada, fig. 4.13. Este problema foi proposto por Hass e Lee (1987). Com ele pretende-se analisar os efeitos de um engaste para geometrias curvas. As mesmas dimensões e propriedades do problema anterior foram usadas. Uma vez que será analisado um laminado não simétrico, condições de simetria não podem ser usadas e a casca inteira deve ser modelada. Em virtude de não existir solução analítica os resultados obtidos, deslocamento radial no centro do cilindro, são comparados com Hass e Lee (1987). Na obtenção dos resultados Hass e Lee (1987) usaram uma malha de 10x10 elementos para a razão $R/h = 20$ e uma malha de 12x12 elementos para $R/h = 100$.

Os resultados são apresentados nas tabelas 4.19 e 2.20 para duas razões de R/h .

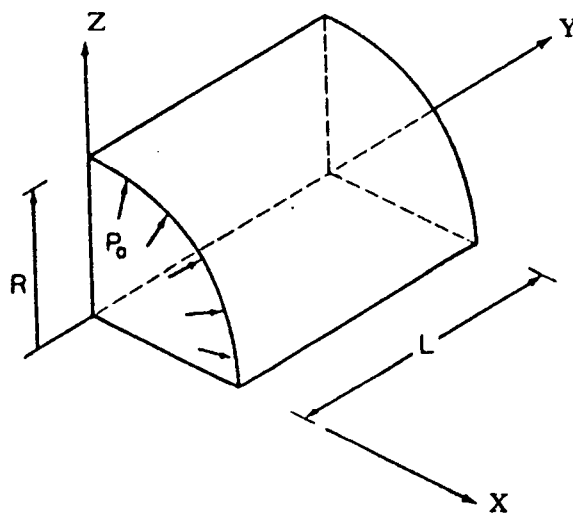


Fig. 4.13 Seção cilíndrica de 90° engastada

Os resultados obtidos e apresentados nas tabelas 4.19 e 4.20 são muito semelhantes aos obtidos por Hass e Lee (1987). Nota-se, portanto, que o aumento das restrições do problema, através do engastamento da seção cilíndrica, não afetou o desempenho do elemento.

Tab. 4.19 Deslocamento radial máximo no centro de uma seção cilíndrica de 90° engastada e sujeita a pressão interna ($R/h=20$)

Laminado	$w \times 10^3$			
	6x6	8x8	10x10	Hass
0	0,4348	0,4382	0,4389	0,4367
-45/45	0,2900	0,2907	0,2909	0,2916
$[-45/45]_s$	0,2900	0,2900	0,2901	0,2909
$[0/90]_s$	0,2280	0,2297	0,2300	0,2300

Tab. 4.20 Deslocamento radial máximo no centro de uma seção cilíndrica de 90° engastada e sujeita a pressão interna ($R/h=100$)

Laminado	$w \times 10^3$			
	6x6	8x8	12x12	Hass
0	1,8649	1,8787	1,8798	1,877
-45/45	0,8829	0,8938	0,8947	0,8936
$[-45/45]_s$	0,8855	0,8971	0,8979	0,8965
$[0/90]_s$	0,7345	0,7431	0,7437	0,7424

4.3.6 Casca esférica

Uma casca esférica de dupla curvatura simplesmente apoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído normal à superfície é analisada neste problema, fig. 4.14. Um laminado simétrico e um laminado não simétrico são usados. Em virtude disso a casca inteira é modelada, embora para o laminado simétrico hipóteses de simetria possam ser feitas. Os resultados são apresentados para duas razões L/h (lado sobre espessura) e para várias razões de R/L (raio sobre lado). Para cada combinação são usadas duas discretizações distintas, respectivamente com 36 e 144 elementos. Uma comparação do deslocamento transversal no centro da casca esférica é feita com uma solução obtida por Reddy (1984c). Este autor usou uma extensão da teoria de casca de Sanders, que inclui cisalhamento transversal para obter a solução por séries. As propriedades das lâminas usadas neste problema são: $E_1 = 25,0 E_2$, $G_{12} = G_{13} = 0,5 E_2$, $G_{23} = 0,2 E_2$ e $\nu_{12} = 0,25$.

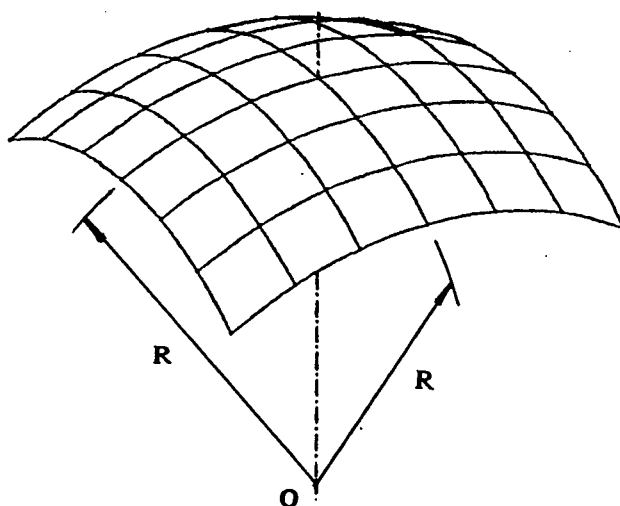


Fig. 4.14 Casca esférica apoiada

Dos resultados apresentados nas tabelas 4.22 e 4.23 verifica-se que à medida que a casca vai-se tornando funda (R/L pequeno), existe uma variação mais acentuada do deslocamento central para uma casca semi-espessa (L/h pequeno) do que para uma casca fina. Nota-se, também, que os resultados obtidos para cascas fundas (R/L pequeno) apresentam um desvio considerável em relação à solução por séries apresentada por Reddy (1984c). Note-se, entretanto, que Reddy (1984c) usou uma

teoria de Sanders modificada cujo comportamento para cascas fundas não é completamente satisfatório. Para a relação $R/L = \infty$, correspondente a um caso de placa, o resultado é praticamente igual à solução proposta por Reddy (1984c).

Tab. 4.21 Deslocamento transversal no centro de uma casca esférica 0/90/0 sujeita a um carregamento distribuído normal à superfície

R/a	Ref.	a/h = 100		a/h = 10	
		\bar{w}	\bar{w}/CFS	\bar{w}	\bar{w}/CFS
1	CFS	0,0718	-	4,8173	-
	6x6	0,0624	0,869	4,4902	0,932
	12x12	0,0627	0,873	4,5079	0,936
2	CFS	0,2858	-	8,0210	-
	6x6	0,2790	0,976	8,0829	1,008
	12x12	0,2793	0,977	8,0836	1,008
3	CFS	0,6224	-	9,1148	-
	6x6	0,6171	0,991	9,1707	1,006
	12x12	0,6174	0,992	9,1705	1,006
4	CFS	1,0443	-	9.5686	-
	6x6	1,0400	0,996	9.6070	1.004
	12x12	1,0405	0,996	9.6066	1.004
5	CFS	1,5118	-	9.7937	-
	6x6	1,5085	0,998	9.8204	1.003
	12x12	1,5091	0,998	9.8200	1.003
10	CFS	3,6445	-	10.110	-
	6x6	3,6445	1,000	10.118	1.001
	12x12	3,6448	1,000	10.117	1.001
Placa	CFS	6,6970	-	10.220	-
	6x6	6,6979	1,000	10.220	1.000
	12x12	6,6970	1,000	10.219	1.000

Reddy (1984c) apresenta ainda um resultado para o laminado 0/90, $L/h = 10$ e $R/L = 5$ que é incoerente. Segundo este resultado uma casca com uma curvatura maior, $R/L = 10$, teria um deslocamento transversal menor, o que fisicamente não é aceitável.

Tab. 4.22 Deslocamento transversal no centro de uma casca esférica 0/90 sujeita a um carregamento distribuído normal à superfície

R/a	Ref.	a/h = 100		a/h = 10	
		\bar{w}	\bar{w}/CFS	\bar{w}	\bar{w}/CFS
1	CFS	0,0718	-	6,054	-
	6x6	0,0619	0,862	5,350	0,884
	12x12	0,0625	0,870	5,379	0,889
2	CFS	0,2855	-	12,668	-
	6x6	0,2785	0,975	12,580	0,993
	12x12	0,2788	0,977	12,581	0,993
3	CFS	0,6441	-	15,739	-
	6x6	0,6346	0,990	15,742	1,000
	12x12	0,6380	0,995	15,741	1,000
4	CFS	1,1412	-	17,184	-
	6x6	1,1349	0,994	17,199	1,001
	12x12	1,1354	0,995	17,198	1,001
5	CFS	1,7535	-	19,944	-
	6x6	1,7477	0,997	17,959	-
	12x12	1,7480	0,997	17,957	-
10	CFS	5,5428	-	19,065	-
	6x6	5,5408	1,000	19,071	1,000
	12x12	5,5401	1,000	19,070	1,000
Placa	CFS	16,980	-	19,469	-
	6x6	16,983	1,000	19,471	1,000
	12x12	16,980	1,000	19,469	1,000

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

A análise de cascas de material composto multilaminado exige, devido à complexidade associada ao problema, um método de solução numérico. Neste sentido empregou-se no presente trabalho o método dos elementos finitos, que é, hoje em dia, a ferramenta mais prática e poderosa para análise de tensões em problemas estruturais. Normalmente a discretização do domínio para uma casca impossibilita o uso de uma análise local por elementos finitos. Em virtude disso foi proposto o desenvolvimento de um elemento finito para análise global de cascas de material composto multilaminado.

Um elemento misto de casca de dupla curvatura baseado em deformações supostas e no funcional de Hellinger-Reissner modificado foi desenvolvido para análise estática linear de materiais compostos multilaminados. O elemento usa um modelo de lâmina equivalente para representar o laminado, sendo portanto o número de graus de liberdade independente do número de lâminas do laminado. Uma transformação covariante foi usada nas deformações supostas para atenuar os efeitos da distorção do elemento. As tensões cisalhantes transversais foram obtidas através das equações de equilíbrio. Para tal usou-se um método baseado em uma aproximação por mínimos quadrados.

O estudo de uma série de problemas propostos demonstra a convergência e o rigor numérico do elemento na análise de problemas de placa e casca. O elemento desenvolvido não apresenta problemas de modos de deformação cinemática (modos espúrios de deformação) e tampouco problemas de travamento (locking) de cisalhamento ou travamento de membrana, comuns em placas e cascas, respectivamente. Verificou-se também que o elemento não apresenta uma excessiva sensibilidade à distorção de malha. Para placas esta sensibilidade é bastante baixa, sendo um pouco maior no caso de cascas. Notou-se que o elemento apresenta uma relativa sensibilidade à curvatura. Este fato pode ser observado no problema de casca esférica e no problema do cilindro puncionado com extremidades livres. Estes problemas necessitam de um maior refino de malha para convergir até a solução analítica.

Entretanto, de uma forma geral, os resultados obtidos demonstram tratar-se de um elemento com uma confiabilidade e uma robustez bastante grandes. Isto permite que o elemento seja usado na análise de cascas compostas multilaminadas sem maiores ressalvas.

Como complementação deste trabalho sugere-se os seguintes tópicos:

- Implementação de um código computacional no qual estejam disponíveis elementos baseados em modelos de lâminas equivalentes, modelos de lâminas distintas bem como elementos de transição.
- Análise de dano em laminados baseada em um código computacional análogo ao descrito acima.
- Uso de técnicas p-adaptativas para a formulação de elementos baseados em teorias de ordem superior.
- Necessidade de se criarem ferramentas numéricas especificamente destinadas ao estudo de materiais compostos, a fim de se facilitar a modelagem e análise de peças complexas.
- Estudo dinâmico de cascas compostas

REFERÊNCIAS

- Agarwal, B.B. & Broutman, L.J. (1980), *Analysis and Performance of Fiber Composites*, John Wiley & Sons Inc.
- Ahmad, S., Irons, B.M. & Zienkiewicz, O.C. (1970), Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 2, pp. 419-451.
- Barcellos, C.S. & Mendonça P.T.R. (1989), Dieixo - Manual do usuário, *GRANTE Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC*
- Cantin, G. (1970), Rigid body motions in curved finite elements, *AIAA J.*, 8,1251.
- Carey, G.F. & Oden, T.J. (1983), *Finite elements: A second course*, Vol II, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Chang, T.Y., Saleeb, A.F. & Graf, W. (1989), On the mixed formulation of a 9-node lagrange shell element, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73, pp. 259-281.
- Chou, P.C. & Carleone, J. (1973), Transverse Shear in Laminated Plate Theories, *AIAA Journal*, September, Vol 11, No 9, pp. 1333-1336.
- Cofer, W.F. & Will, K.M. (1991), A three-dimensional shell-solid transition element for general nonlinear analysis, *Computers & Structures*, Vol 38, No 4, pp. 449-462.
- Cook, R.D. (1981), *Concepts and applications of finite element analysis*, Second Edition, John Wiley & Sons.
- Donea, J. & Belytschko, T. (1989), Advances in Computacional Mechanics, *SMIRT Conference*.

- Dong, S.B. (1966), Analysis of laminated shells of revolution, *J. Eng. Mech. Div*, 92
- Engblom J.J. & Ochoa O.O. (1986), Finite element formulation including interlaminar stress calculations, *Computers & Structures*, Vol 23, No 2, pp. 241-249.
- Felippa, C.A. & Militello, C. (1989) Developments in variational methods for high performance plate and shell element In *Analytical and computational models of shells*, edited by Ahmed K. Noor, Ted Belytschko and Juan C. Simo, ASME.
- Haas, D.J. & Lee, S.W. (1987), A nine-node assumed-strain finite element for composite plates and shells, *Computers & Structures*, Vol 26, No 3, pp. 445-452.
- Huang, H.C. & Hinton, E. (1986), A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 22, pp. 73-92.
- Jones, R.N. (1975), *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill.
- Kang, D.S. (1990), Present finite element technology from a hybrid formulation perspective, *Computers & Structures*, Vol 35, No 4, pp. 321-327.
- Kapania, R.K. (1988), Analysis of Laminated Shells, In *Recent Advances in Macro-and Micro-mechanics of Composite Materials Structures ASME AD - 13*.
- Lakshiminarayana, H.V. and Murthy, S.S. (1984), A shear-flexible triangular finite element model for laminated composite plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 20, pp. 591-623.
- Lee, S.W., Wong, S.C. & Rhiu J.J. (1985) Study of a nine-node mixed formulation finite element for thin plates and shells, *Computers & Structures*, Vol 21, pp. 1325-1334.
- Noor, A.K. & Burton, S.W. (1989), Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates, *Appl. Mech. Rev.*, vol 42, no 1, pp. 1-13.
- Pagano, N.J. (1970a), Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending, *J. Composite Mat.*, 3, pp. 398-411.

- Pagano, N.J. (1970b), Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *J. Composites Mat.*, 4, pp. 20-34.
- Pagano, N.J. and Hatfield, S.J. (1972), Elastic behaviour of multilayered bidirectional composites, *AIAA Journal*, 10, pp. 931-933.
- Park, K.C. & Stanley, G.M. (1986), A Curved C^0 Shell Element Based on Assumed Natural-Coordinate Strains, *Journal of Applied Mechanics*, Vol 53, June.
- Pryor Jr., C.W. & Barker, R.M. (1971). A Finite-Element Analysis Including Transverse Shear Effects for Applications to Laminated Plates, *AIAA Journal*, Vol 9, No 5.
- Reddy, J.N. (1982), Bending of laminated anisotropic shells by a shear deformable finite element, *Fibre Science and Technology*, No 17. pp. 9-24.
- Reddy, J.N. (1984a), *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons Inc.
- Reddy, J.N. (1984b), A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*, Dec. Vol 55, 745-52.
- Reddy, J.N. (1984c), Exact solution of moderately thick laminated shells, *Journal of Engng. Mechanics*, Vol 110, No 5.
- Reddy, J.N. & Liu, C.F. (1985), A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells, *Int J. Engng Sci.*, Vol 23, No 3, pp. 319-330.
- Reddy, J.N. & Sandidge D. (1987), Mixed Finite Models for Laminated Composite Plates, *Journal of Engineering for Industry*, February, Vol 109/39.
- Rhu J.J. & Lee S.W. (1987), A new efficient mixed formulation for thin shell finite element models, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 24, pp. 581-604.
- Saleeb, A.F., Chang, T.Y. & Graf, W. (1987), A quadrilateral shell element using a mixed formulation, *Computers & Structures*, Vol 26, pp. 787-803.

- Schmit, L.A. & Monforton, G.R. (1970), Finite element analysis of sandwich plate and laminate shells with laminated faces, *AIAA Journal*, Vol 8, pp. 1454-61.
- Simo, J.C. & Fox, D.D. (1989), A stress resultant geometrically exact shell model. Part 1: Formulation and optimal parametrization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72, pp. 267-304.
- Spilker, R.L. and Jakobs, D.M. (1986), Hybrid stress reduced-Mindlin elements for thin multilayer plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 23, 555-578.
- Stolarski, H. and Belytschko, T. (1983), Shear and membrane locking in curved C^0 elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41, 279-296.
- Stolarski, H. & Belytschko, T. (1985), Limitation principles for mixed finite elements based on the Hu-Washizu variational formulation, In *Hybrid and Mixed Finite Element Methods* (Edited by R.L. Spilker and K.W. Reed), The Applied Mechanics Division, ASME, AMD-vol 73, pp.91-112.
- Timoshenko, S. and Krieger-Woinowsky, S. (1959), *Theory of plates and shells*, Mc Graw-Hill.
- Thompson, G.L. (1973), Finite-element for free vibration of general anisotropic laminated thin shells, In *Composite Materials in Engineering design*, Proc 6th St Louis Symposium, May, (ed. B. R. Noton) American Society for Metals.
- Xue, W.M. & Atluri, S.N. (1985), Existence and stability, and discrete BB rank conditions, for general mixed-hybrid finite elements in elasticity, In *Hybrid and Mixed Finite Element Methods* (Edited by R.L. Spilker and K.W. Reed), The Applied Mechanics Division, ASME, AMD-vol 73, pp.91-112.
- Washizu, K. (1982), *Variational methods in elasticity and plasticity*, 3rd ed. Pergamon Press.
- White, D.W. & Abel, J.F.(1990), Accurate and efficient nonlinear formulation of a nine-node shell element with spurious mode control, *Computers & Structures*, vol 35, No 6, pp. 621-641

- Whitney, J.N. (1987), *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates* , Technomic Pub. Co. Inc.
- Wilson, E.A. & Parsons, B.(1969), The finite element analysis of filament-reinforced axisymmetric bodies, *Fibre Science and Technology*, No 2, pp.155-6.
- Wilt, T.E., Saleeb, A.F., & Chang T.Y. (1990), A mixed element for laminated plates and shells, *Computers & Structures*, Vol 37, No 4, pp. 597-611.
- Yang, H.T.Y., Saigal, S. & Liaw, D.G. (1990), Advances of thin shell finite element and some applications-Version I, *Computers & Structures*, Vol 35, No 4, pp. 481-504.
- Yang, P.C., Norris, C.H. & Stavsky, Y. (1966), Elastic wave propagation in heterogeneous plates, *Int. J. Solids Structures*, 2, 665-684
- Yeom, C.H. & Lee, S.W. (1991), On the strain assumption in a finite element model for plates and shells, *Int. Jour. Num. Met. Engng.*, vol 31, pp. 287-305.

APÊNDICE A

As matrizes B_0^g e B_1^g apresentadas na equação 3.10 são obtidas através das seguintes relações:

$$B_0^g = \begin{bmatrix} A_k & 0 & 0 & -D_k v_{y1_k} & D_k v_{x1_k} \\ 0 & B_k & 0 & -E_k v_{y2_k} & E_k v_{x2_k} \\ 0 & 0 & C_k & -F_k v_{y3_k} & F_k v_{x3_k} \\ B_k & A_k & 0 & -[E_k v_{y1_k} + D_k v_{y2_k}] & [E_k v_{x1_k} + D_k v_{x2_k}] \\ 0 & C_k & B_k & -[F_k v_{y2_k} + E_k v_{y3_k}] & [F_k v_{x2_k} + E_k v_{x3_k}] \\ C_k & 0 & A_k & -[F_k v_{y1_k} + D_k v_{y3_k}] & [F_k v_{x1_k} + D_k v_{x3_k}] \end{bmatrix}$$

$$B_1^g = \frac{h_k}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -A_k v_{y1_k} & A_k v_{x1_k} \\ 0 & 0 & 0 & -B_k v_{y2_k} & B_k v_{x2_k} \\ 0 & 0 & 0 & -C_k v_{y3_k} & C_k v_{x3_k} \\ 0 & 0 & 0 & -[B_k v_{y1_k} + A_k v_{y2_k}] & [B_k v_{x1_k} + A_k v_{x2_k}] \\ 0 & 0 & 0 & -[C_k v_{y2_k} + B_k v_{y3_k}] & [C_k v_{x2_k} + B_k v_{x3_k}] \\ 0 & 0 & 0 & -[A_k v_{y3_k} + C_k v_{y1_k}] & [A_k v_{x3_k} + C_k v_{x1_k}] \end{bmatrix}$$

sendo,

$$A_k = J_{11}^{-1} N_{k,\eta} + J_{12}^{-1} N_{k,\xi}$$

$$B_k = J_{21}^{-1} N_{k,\eta} + J_{22}^{-1} N_{k,\xi}$$

$$C_k = J_{31}^{-1} N_{k,\eta} + J_{32}^{-1} N_{k,\xi}$$

$$D_k = \frac{h_k}{2} J_{13}^{-1} N_k$$

$$E_k = \frac{h_k}{2} J_{23}^{-1} N_k$$

$$F_k = \frac{h_k}{2} J_{33}^{-1} N_k$$

onde N_k são as funções de interpolação do nó k , J_{ij}^{-1} representa o componente ij da inversa da matriz jacobiana, v_{i_k} são os vetores base do sistema de coordenadas nodal k e h_k é a espessura nodal.

APÊNDICE B

O vetor deformações globais deve ser transformado em deformações locais para se construir a matriz de rigidez do elemento. A matriz transformação de deformações, equação 3.12, é construída a partir das componentes dos vetores ortogonais que definem o sistema de coordenadas locais.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix}$$

APÊNDICE C

A matriz T apresentada na equação 3.74 é obtida através dos vetores base contravariantes g^i .

$$g^1 = \begin{pmatrix} g_1^1 \\ g_2^1 \\ g_3^1 \end{pmatrix}$$

$$g^2 = \begin{pmatrix} g_1^2 \\ g_2^2 \\ g_3^2 \end{pmatrix}$$

$$g^3 = \begin{pmatrix} g_1^3 \\ g_2^3 \\ g_3^3 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} (g_1^1)^2 & (g_1^2)^2 & g_1^1 g_1^2 & g_1^2 g_1^3 & g_1^1 g_1^3 \\ (g_2^1)^2 & (g_2^2)^2 & g_2^1 g_2^2 & g_2^2 g_2^3 & g_2^1 g_2^3 \\ (g_3^1)^2 & (g_3^2)^2 & g_3^1 g_3^2 & g_3^2 g_3^3 & g_3^1 g_3^3 \\ 2g_1^1 g_2^1 & 2g_1^2 g_2^2 & g_1^1 g_2^2 + g_1^2 g_2^1 & g_1^2 g_2^3 + g_1^3 g_2^2 & g_1^1 g_2^3 + g_1^3 g_2^1 \\ 2g_2^1 g_3^1 & 2g_2^2 g_3^2 & g_2^1 g_3^2 + g_2^2 g_3^1 & g_2^2 g_3^3 + g_2^3 g_3^2 & g_2^1 g_3^3 + g_2^3 g_3^1 \\ 2g_1^1 g_3^1 & 2g_1^2 g_3^2 & g_1^1 g_3^2 + g_1^2 g_3^1 & g_1^2 g_3^3 + g_1^3 g_3^2 & g_1^1 g_3^3 + g_1^3 g_3^1 \end{bmatrix}$$